

Internationale Kommission für die Hydrologie des Rheingebietes

Commission internationale de l'Hydrologie du bassin du Rhin

Verteilungsfunktionen in der Hydrologie

H.-G. Mendel



**Bericht Nr. II-8 der KHR
Rapport no. II-8 de la CHR**

Internationale Kommission für die Hydrologie des Rheingebietes

Commission internationale de l'Hydrologie du bassin du Rhin

Verteilungsfunktionen in der Hydrologie

H.-G. Mendel - Bundesanstalt für Gewässerkunde Koblenz



**Secretariaat CHR | KHR
Maerlant 16**

**Postbus 17
NL-8200 AA Lelystad
Niederlande | Pays-Bas**

Bericht Nr. II-8 der KHR
Rapport no. II-8 de la CHR

© 1993, CHR/KHR
ISBN 90-70980-19-3

Fonctions de distribution dans l'hydrologie

Textes français:

Préface: p. 3

Introduction: p. 7

Informations sur la CHR: p. 121

Verdelingsfuncties in de hydrologie

Nederlandstalige gedeelten:

Inleiding: blz. 9

Bijzonderheden CHR: blz. 123

Distribution functions in hydrology

English texts:

Introduction: p. 9

Particulars CHR: p. 123

CIP-GEGEVENS KONINKLIJKE BIBLIOTHEEK, DEN HAAG

Mendel, H.-G.

Verteilungsfunktionen in der Hydrologie / H.-G. Mendel. -

Lelystad: CHR/KHR. - Ill. - (Rapport / Commission

Internationale de l'Hydrologie du Bassin du Rhin =

Bericht / Internationale Kommission für die Hydrologie

des Rheingebietes = Report / International Commission

for the Hydrology of the Rhine basin. II ; no. 8)

Met lit. opg.

ISBN 90-70980-19-3

Trefw.: hydrologie ; Rijn

Vorwort

»Die Kenntnisse der seltenen und extremen Ereignisse in der Hydrologie sind von größter Wichtigkeit für die Wasserwirtschaft und den Umweltschutz.«

Die Frage nach der Über- und Unterschreitungswahrscheinlichkeit bestimmter Werte von hydrologische Parametern, beispielsweise der Hochwasserabflüsse, beschäftigt die Wissenschaftler und Praktiker schon seit vielen Jahrzehnten. Heute werden für die Beantwortung dieser Frage in der Hydrologie moderne Verfahren der Statistik resp. der Wahrscheinlichkeitstheorie eingesetzt.

In der vorliegenden Publikation wird die Ermittlung der Über- und Unterschreitungswahrscheinlichkeit seltener Hochwasserscheitelabflüsse dargestellt. Zuerst wird eine Übersicht über theoretische Verteilungsfunktionen gegeben und dann die Transformation (Parameter-, Variablentransformation) stetiger Verteilungen behandelt. Ausführungen über die Zusammenhänge zwischen den einzelnen stetigen Verteilungen und den möglichen Parameter-Anpassungsmethoden runden die Darstellung ab. Die praktische Anwendung wird mithilfe der Messungen am Rheinpegel Maxau aufgezeigt. Schwerpunkt wird bei dieser Arbeit nicht auf eine spezielle Verteilungsfunktion und deren Anwendung gelegt, sondern im Vordergrund steht die Übersicht und die Darstellung gegenseitiger Abhängigkeiten.

Die vorliegende Arbeit stellt ein geeignetes Hilfsmittel für den Praktiker dar, der mit der Ermittlung von Wahrscheinlichkeitsverteilungen in der Hydrologie betraut ist. Die breite Auswahl der dargestellten stetigen Verteilungsfunktionen und deren Zusammenhänge erleichtert die Auswahl der für eine bestimmte Problemstellung besonders geeignet erscheinenden Wahrscheinlichkeitsverteilung. Dem Neuling vermittelt diese Publikation eine gute Übersicht über die Verteilungsfunktionen und deren Anwendungsmöglichkeiten.

Préface

«En hydrologie, la connaissance des événements rares et d'extrême magnitude prend une immense importance, tant pour la gestion des eaux que pour la protection de l'environnement.»

Depuis de nombreuses décennies déjà, scientifiques et praticiens s'activent autour du problème de la probabilité de dépassement ou de non-dépassement de certaines valeurs des paramètres hydrologiques, dont en particulier les débits de crue. La solution de ce problème passe par la mise en oeuvre de méthodes statistiques modernes, fondées sur des développements récents de la théorie des probabilités.

La présente publication décrit la détermination des probabilités de dépassement et de non-dépassement de débits de pointes se produisant rarement. Tout d'abord on donne un aperçu des diverses fonctions de distribution théoriques, puis on traite la transformation (paramètres et variables) de distributions continues. Des indications sur les relations entre les diverses distributions continues et les méthodes possibles d'adaptation des paramètres complètent l'exposé. Une démonstration d'application pratique est faite à l'aide de niveaux relevés à l'échelle de Maxau sur le Rhin. Dans ce travail, l'accent n'a pas été mis sur une fonction de distribution particulière, avec ses applications, mais on a mis au premier plan l'essentiel des dépendances mutuelles et de leur représentation.

Pour l'hydrologue praticien, le présent travail représente un moyen parfaitement approprié lui permettant de déterminer des distributions de probabilité. L'étendue du choix de distributions continues et de leurs interconnexions qui ont été décrites, facilite la sélection d'une distribution de probabilité paraissant bien adaptée à un problème donné. Ceux qui débutent dans ce domaine de l'hydrologie trouveront là un bon aperçu des fonctions de distribution disponibles et de leurs possibilités d'application.

Die KHR dankt dem Rapporteur H.-G Mendel von der Bundesanstalt für Gewässerkunde in Koblenz und allen weiteren Personen, die zum Gelingen dieses Werkes beigetragen haben.

Der Präsident der KHR
Dr. M. Spreafico

La CHR remercie vivement le rapporteur, Monsieur H.-G. Mendel de la Bundesanstalt für Gewässerkunde (Institut fédéral d'hydrologie) à Coblenz, ainsi que toutes les personnes qui ont contribué à la réalisation de cet ouvrage.

Le président de la CHR
Dr. M. Spreafico

INHALTSVERZEICHNIS

	Seite
<i>Vorwort</i> (deutsch und französisch)	3
1. Einleitung (deutsch, französisch, niederländisch und englisch)	7
2. Grundlagen	11
2.1 Die empirische und theoretische Verteilung, Verteilungsfunktionen und Verteilungsdichte	11
2.2 Kenngrößen (Kennzahlen) von Verteilungen	14
3. Transformationen stetiger Verteilungen	17
3.1 Kenngrößen, Parameter und Variable	17
3.2 Parameterspezifikation	17
3.3 Parametertransformation	18
3.4 Variablentransformation	18
3.5 Beispiele für Variablentransformationen bei stetigen Verteilungen	21
3.5.1 Normalverteilung	21
3.5.2 Exponentialverteilung	21
4. Analytische Abhandlung der stetigen Verteilungen	25
5. Anpassungsmethoden	101
5.1 Überblick	101
5.2 Zeichnerische Anpassung (Auftragshilfen, plotting-positioning-formulas)	103
5.3 Allgemeine Gleichung der hydrologischen Häufigkeitsanalyse (k-Werte)	105
5.4 Maximum-Likelihood (maximale Mutmaßlichkeit)	105
5.5 Maximale Entropie	105
5.6 Prinzip der kleinsten Quadrate	106
5.7 Tangentenverfahren	106
5.8 L-Momente	106
5.9 Momentenmethode - Kenngrößenidentifikation	107
6. Anwendung	109
6.1 Rechenprogramme	109
6.2 Beispiel für eine Anwendung der Gamma- und der Hypergammaverteilung (Momentenmethode)	111
Literaturverzeichnis	117
KHR-Veröffentlichungen	119
Einige Informationen über die KHR (deutsch, französisch, niederländisch, und englisch)	121

1. EINLEITUNG

Das Problem der Über- und Unterschreitungswahrscheinlichkeit stellt sich überall da, wo ein Zufallsprozeß abläuft, der die Möglichkeit von Extremwerten einschließt. In der Meteorologie, der Hydrologie, der Geophysik, der Astronomie und der Volkswirtschaft werden solche Prozesse mit Methoden der mathematischen Statistik behandelt. Daneben gibt es noch das breite Spektrum der sog. deterministischen Modellbasis mit statistischen, empirischen und physikalisch begründeten Ansätzen einschließlich des *wahrscheinlich größten* Ereignisses.

Das vorliegende Heft beschäftigt sich überwiegend mit der Berechnung der Über- und Unterschreitungswahrscheinlichkeit mittels sog. mathematischer Verteilungsfunktionen. Dabei werden historische Daten von extremen Ereignissen verwendet, hier Scheiteldurchflüsse am Pegel Maxau/Rhein.

Es besteht jedoch oft Unkenntnis darüber, wie die einzelnen Verteilungsfunktionen analytisch aufgebaut sind, von welcher Art der Funktionsverlauf ist und wie die Anwendung erfolgen sollte.

Die internationale Kommission für die Hydrologie des Rheingebiets hat in ihrem Bericht Nr. 1-4 »Berechnung von Hoch- und Niedrigwasserwahrscheinlichkeiten im Rheingebiet« auch die wichtigsten im Rheingebiet benutzten Verteilungsfunktionen zusammengestellt und kurz erläutert. Die vorliegende Untersuchung geht über das dortige Kompendium hinaus. Sie hat das Ziel, eine Synopse von stetigen Verteilungen für die Anwendung in der Hydrologie zu erstellen.

Das bedeutet einmal Darstellung der Funktionen, ihrer Kenngrößen und Parameter, sowie die Klärung von bestehenden Zusammenhängen. Zum anderen bedeutet es die Durchführung von Simulationsrechnungen für verschiedene Definitionsbereiche und Parameterwerte, um die Anwendungseigenschaften für die jeweiligen Benutzergegebenheiten herauszufiltern.

1. INTRODUCTION

Le problème des probabilités de dépassement ou de non-dépassement se manifeste partout là où un processus aléatoire est en action, incluant la production possible de valeurs extrêmes. En météorologie, en hydrologie, en géophysique, en astronomie et même en économie, de tels processus sont décrit à l'aide de méthodes de la statistique mathématique. Il existe en outre un spectre étendu de méthodes ressortant d'un modèle qualifié de déterministe, fondées sur des considérations statistiques, empiriques et physiques, incluant le concept du *plus grand événement probable*.

Le présent rapport est consacré principalement au calcul des probabilités de dépassement et de non-dépassement au moyen de fonctions mathématiques de distributions. Pour démontrer ces procédures, des séries de données historiques étaient nécessaires et l'on a choisi en l'occurrence la série des valeurs des débits de pointe du limnimètre de Maxau sur le Rhin.

On constate fréquemment cependant une certaine méconnaissance de la construction analytique des diverses fonctions de distribution, du type de forme qu'elles peuvent prendre ainsi que des conditions de leur utilisation.

Dans son Rapport no. I-4 «Calcul des probabilités de crues et d'étiages dans le bassin du Rhin», la Commission internationale de l'Hydrologie du bassin du Rhin a bien déjà brièvement présenté et expliqué les fonctions de distributions utilisées le plus fréquemment par les pays membres. La présente recherche va plus loin que ce compendium, son objectif étant d'établir une véritable synopsis des distributions continues, utilisables en hydrologie.

Tout cela implique d'une part une présentation des fonctions, de leur caractéristiques et de leurs paramètres et d'autre part la conduite de calculs de simulation, pour différents domaines de définition et valeurs des paramètres, de façon à pouvoir vérifier leur comportement lors d'applications sous divers conditions d'utilisation.

Nach der Einleitung wird neben einer kurzen Übersicht über die Grundlagen der empirischen und theoretischen Verteilung (Abschnitt 2) speziell auf Transformationen eingegangen (Abschnitt 3). Insbesondere soll eine Tabelle dem Anwender helfen, Variablentransformationen selbst durchzuführen. Abschnitt 4 enthält eine alphabetische Sammlung der wichtigsten Verteilungen, dargestellt mit Dichtefunktion und (falls analytisch darstellbar) der Verteilungsfunktion sowie den Kenngrößen Erwartungswert, Modus, Median, Varianz, Schiefe und Exzeß. In den Bemerkungen zu jeder Verteilung ist aufgeführt, aus welchen Verteilungen sie abgeleitet werden kann (\Leftarrow), welche Verteilungen aus ihr abgeleitet werden können (\Rightarrow) und wie dies zu bewerkstelligen ist. Um dem Anwender anschauliches Material an die Hand zu geben, wird in einigen Fällen die Dichtefunktion graphisch dargestellt (geplottet), jeweils mit verschiedenen Parameterwerten. Dies verdeutlicht den Einfluß der Parameter auf den Funktionsverlauf. Zwei dem Abschnitt 4 angefügte Abbildungen sollen den Zusammenhang zwischen den einzelnen Verteilungen darstellen.

Abschnitt 5 enthält Hinweise auf Anpassungsmethoden, also darauf, wie die Parameter der stetigen Verteilung geschätzt werden können.

Eine Anwendung auf den Rheinpegel Maxau findet sich in Abschnitt 6.

Ein von der Deutschen Forschungsgemeinschaft finanzierter erster Entwurf dieser Arbeit stammt von Dipl. Math. Dr. M. Sontheimer (Freiburg/Heidelberg) und eines spätere Durchsicht von Dipl. Math. H. Jensen (Zürich), Dr. W. Finke (Berlin) und Dr. M. Schramm (Dresden). Ihnen gilt mein besonderer Dank.

Après cette introduction, outre un sommaire concis des fondements des notions de distributions empiriques et théoriques (chapitre 2), on aborde spécifiquement la question des transformations (chapitre 3), avec en particulier un tableau de valeurs numériques permettant à l'utilisateur d'effectuer lui-même des transformations de variables. Le chapitre 4 contient un recueil alphabétique des distributions les plus importantes, avec leurs loi de probabilité et (pour autant que cela soit possible analytiquement) leur fonction de répartition, avec les espérances mathématiques des caractéristiques tels que mode, médiane, variance, biais et excédent. Les remarques accompagnant chaque distribution indiquent à partir de quelles autres distributions elles peuvent être dérivées (\Leftarrow), quelles autres distributions peuvent en être dérivées (\Rightarrow), et de quelle façon on peut y parvenir. Comme aide visuelle à l'utilisateur, dans certains cas la loi de probabilité est représentée graphiquement (plotting) et avec différentes valeurs des paramètres, de manière à mettre en évidence l'influence de ceux-ci sur la forme générale de la fonction. Deux figures adjointes au chapitre 4 explicitent les relations entre les différentes distributions.

Le chapitre 5 contient des indications relatives aux méthodes d'ajustement, c'est-à-dire en fait aux méthodes d'estimation des paramètres.

Une exemple de mise en oeuvre, avec les données fournies par l'échelle de Maxau, peut être trouvé au chapitre 6.

Une première ébauche de cet ouvrage, financée par la Communauté Scientifique Allemande (Deutsche Forschungsgemeinschaft), était due à Dr. M. Sontheimer, mathématicien diplômé (Fribourg/Heidelberg). Elle a été ensuite revue par H. Jensen, mathématicien diplômé (Zurich), Dr. W. Finke (Berlin) et Dr. M. Schramm (Dresden). Je tiens à leur exprimer ma profonde gratitude.

1. INLEIDING

Het probleem van de over- en onderschrijdingswaarschijnlijkheid openbaart zich overal waar een toevalsproces plaatsvindt, waarbij de mogelijkheid aanwezig is dat extreme waarden zullen optreden. In de meteorologie, hydrologie, geofysica, astronomie en economie worden dergelijke processen volgens methoden uit de mathematische statistiek beschreven. Daarnaast bestaat er nog het brede spectrum van de zgn. deterministische modelaanpak volgens methoden op statistische, empirische en fysische basis, inclusief de *waarschijnlijk grootste gebeurtenis*.

Het voorliggende rapport behandelt met name de berekening van over- en onderschrijdingswaarschijnlijkheid met behulp van zgn. mathematische verdelingsfuncties. Daarbij worden historische gegevensreeksen van extreme gebeurtenissen gebruikt, in dit geval topafvoeren van het Rijnmeetstation Maxau.

Het is echter vaak onbekend hoe de verschillende verdelingsfuncties analytisch zijn opgebouwd, hoe de functie verloopt en op welke wijze de functie dient te worden toegepast.

De internationale Commissie voor de Hydrologie van het Rijngebied heeft in haar rapport nr. I-4 „Berekening van hoog- en laagwaterwaarschijnelijkheden in het Rijngebied” de belangrijkste in het Rijngebied gebruikte verdelingsfuncties geïnventariseerd en kort toegelicht. Het voorliggende onderzoek gaat verder dan dit compendium en heeft tot doel een synopsis van de continue verdelingen voor gebruik in de hydrologie te geven.

Dat resulteert aan de ene kant in een beschrijving van de functies, hun karakteristieken en parameters alsmede een verduidelijking van onderlinge relaties. Aan de andere kant betekent het dat simulatieberekeningen worden uitgevoerd voor verschillende definitiegebieden en parameterwaarden, om zo de toepassingseigenschappen voor de betreffende gebruiksomstandigheden te kunnen herleiden.

Na de inleiding wordt naast een kort overzicht van de basis van de empirische en theoretische verdeling (hoofdstuk 2) speciaal ingegaan op transformaties (hoofdstuk 3). Daarbij kan de

1. INTRODUCTION

The problem of the probability of exceedance and non-occurrence presents itself wherever a random process takes place which includes the possible occurrence of extreme values. In meteorology, hydrology, geophysics, astronomy and economics, such processes are treated with methods from mathematical statistics. Besides, there is also the wide range of the so-called deterministic model approach with statistically, empirically and physically based methods, including the *probably maximum event*.

The present report mainly treats the calculation of the probability of exceedance and non-occurrence by means of so-called mathematical distribution functions, using historical data of extreme events, in this case maximum discharges at the gauging station of Maxau on the Rhine.

However, it is often unknown how the different distribution functions are structured analytically, how the function works, and how it should be applied.

In its report no. I-4 'Calculation of Probability of Floods and Droughts in the Rhine Basin', the international Commission for the Hydrology of the Rhine basin also included an overview and brief explanation of the most important distribution functions used in the Rhine basin. The present study goes further than the compendium presented there. The objective here is to create a synopsis of continuous distributions for application in hydrology.

On the one hand, this results in a presentation of functions, their characteristics and parameters, as well as the clarification of existing mutual relationships. On the other hand it means that simulation calculations are carried out for different definition areas and parameter values, in order to filter out the application characteristics for the circumstances of the users concerned.

After the introduction, chapter 2 gives a short survey of the basic principles of empirical and theoretical distribution. Subsequently, in chapter 3, special attention is given to trans-

gebruiker met behulp van een tabel zelf variabelentransformaties uitvoeren. Hoofdstuk 4 bevat een alfabetische opsomming van de belangrijkste verdelingen, beschreven met hun dichtheidsfunctie en (indien een analytische beschrijving mogelijk is) de verdelingsfunctie alsmede de karakteristieke verwachtingswaarde, modus, mediaan, variantie, scheefheid en kurtosis. Bij de opmerkingen is voor iedere verdeling aangegeven, uit welke verdelingen ze kan worden afgeleid (\Leftarrow), welke verdelingen uit haar kunnen worden afgeleid (\Rightarrow) en hoe dit in zijn werk gaat. Om de gebruiker visueel ter zijde te staan, wordt in een aantal gevallen de dichtheidsfunctie grafisch weergegeven (geplot), telkens met verschillende parameters. Dit verduidelijkt de invloed van de parameters op het functieverloop. Twee aan hoofdstuk 4 toegevoegde figuren zijn bedoeld om de relatie tussen de verschillende verdelingen weer te geven.

Hoofdstuk 5 bevat aanwijzingen voor aanpassingsmethoden, d.w.z. hoe de parameters van de continue verdelingen geschat kunnen worden.

Een toepassing voor het afvoermeetstation Maxau/Rijn is in hoofdstuk 6 gegeven.

Een door de Duitse Vereniging voor Onderzoek gefinancierd eerste ontwerp voor deze studie is opgesteld door Dipl.-Math. Dr. M. Sontheimer (Freiburg/Heidelberg) en een latere bewerking werd uitgevoerd door Dipl.-Math. H. Jensen (Zürich), Dr. W. Finke (Berlijn) en Dr. M. Schramm (Dresden). Naar hen gaat mijn bijzondere dank uit.

A table is presented particularly to help the user to carry out variable transformations by himself. Chapter 4 contains an alphabetical compilation of the most important distributions, presented with density function and (if an analytical presentation is possible) distribution function, as well as the parameters of expected value, mode, median, variance, skewness and excess. The remarks accompanying each distribution state the distributions from which it can be derived (\Leftarrow), the distributions that can be derived from it (\Rightarrow), and how this can be realized. To illustrate the material offered to the user, the density function is in some cases presented graphically (plotted), each time with different parameter values. Thus the parameter's influence on the course of the function is clarified. Two figures, appended to chapter 4, are meant to represent the relationship between the individual distributions.

Chapter 5 contains references to application methods, i.e. how to estimate the parameters of the continuous distribution.

An application to the gauging station of Maxau on the Rhine is given in chapter 5.

A first draft of this study, financed by the German Research Association (Deutsche Forschungsgemeinschaft), was written by Dipl.Math. Dr. M. Sontheimer (Freiburg/Heidelberg), and was subsequently reviewed by Dipl.Math. H. Jensen (Zurich), Dr. W. Finke (Berlin) and Dr. M. Schramm (Dresden). I would like to express my special thanks for their cooperation.

2. GRUNDLAGEN

2.1 Die empirische und theoretische Verteilung, Verteilungsfunktionen und Verteilungsdichte

Es soll in überwiegend allgemeiner Form die Zufallsvariable X eines Naturprozesses behandelt werden. Als solcher kommt die Abflußbildung im Einzugsgebiet, gemessen in m^3/s als Durchfluß am Pegel, in Betracht. Ähnlich verhält es sich bei zahlreichen anderen Naturprozessen, z. B. beim Niederschlagsprozeß, dessen Zufallsvariable die Niederschlagsbildung über einem Ort oder einem Gebiet sei, gemessen in mm Niederschlagshöhe je Tag an einer Meßstelle bzw. über einem Einzugsgebiet. Die Gesamtheit der Daten von X stellt das sog. Grundkollektiv (Grundgesamtheit) dar. Dieses steht im oben genannten Fall nicht zur Verfügung, denn es kann weder unendlich lange gemessen werden, noch bleiben die Eigenschaften des Prozeßablaufes über lange Zeitspannen unverändert erhalten (Homogenität der Reihe). Daher verwendet man als repräsentativ für die Grundgesamtheit ein zeitlich begrenztes Teilkollektiv (Stichprobe, Zeitreihe) und nimmt an, daß darin alle Eigenschaften der Grundgesamtheit angenähert enthalten sind.

Um der Voraussetzung der gegenseitigen statistischen Unabhängigkeit zu genügen, beschränkt man sich auf eine bestimmte Auswahl von Spitzendurchflüssen. Diese Stichprobe kann entweder die Serie der jährlichen Extremwerte sein (jährliche Serie), insbesondere dann, wenn der Umfang N der Serie einer statistischen Behandlung genügt ($N > 30$), oder die partielle Serie, deren Ereignisse einen bestimmten Schwellenwert nicht unterschreiten. In der Praxis genügt es zur Bildung einer partiellen Serie i. a. die 2 - 4 Spitzendurchflüsse eines jeden Jahres - zweckmäßigerweise getrennt nach Sommer- und Winterereignis - zu verwenden.

Die Verteilung von X dieses so definierten Teilkollektivs nennt man empirische Häufigkeitsverteilung oder Histogramm. Da sowohl die empirische Häufigkeitsverteilung als auch ihr theoretisches Analogon im Schrifttum vielfach behandelt sind, beschränken wir uns im Folgenden zunächst auf eine kurze Darstellung und eine Gegenüberstellung beider Funktionen.

Die empirische Häufigkeitsverteilung basiert auf der Stichprobe der $N = 120$ Spitzendurchflüsse $Q(i), i=1, \dots, N$ am Pegel Maxau der Jahre 1871-1990. Wir schreiben dafür $h(Q) = h(x)$. Die Anzahl der Klassen K , in die die N Werte dieser Stichprobe aufgeteilt werden, kann man nach

$$K = 5^{10} \log N = 5^{10} \log 120 \approx 10 \quad (2.1)$$

bestimmen [Taubenheim 1969].

Die Differenz aus dem größten und dem kleinsten Wert der Stichprobe ist die Spannweite D . Damit erhält man die Klassenbreite D/K , die wir mit Δx abkürzen wollen. Für die genannte Reihe sind die extremen Durchflüsse $Q_{\text{MAX}} = 6090 \text{ m}^3/\text{s}$ (1882) und $Q_{\text{MIN}} = 2930 \text{ m}^3/\text{s}$ (zufällig ebenfalls 1882), woraus $D = 3160 \text{ m}^3/\text{s}$ und $\Delta x = \Delta Q = 316 \text{ m}^3/\text{s} \approx 300 \text{ m}^3/\text{s}$ folgt. Die Rundungen sind zulässig und sinnvoll.

Werden aus einer Reihe vom Umfang N die N Spitzendurchflüsse entnommen, so spricht man von einer partiellen Serie [DVWK 1979 und 1988]. Dem obigen Beispiel liegen je 2 Winter- und 2 Sommer-Hochwasserspitzen der Jahre 1871 - 1990 zugrunde, allerdings fehlen zwischen 1871 und 1900 einige Werte. Die Jahre 1884 - 1886, 1893, 1894 und 1899 sind überhaupt nicht belegt, jedoch kennt man aus diesen Jahren keine nennenswerten Hochwasser, so daß die aus den verbleibenden Werten gebildete Serie dadurch allenfalls unbedeutend verfälscht wird. Wollte man aus den jährlichen Spitzen eine Serie bilden, so müßte man sich auf die Reihe 1900 - 1990 mit nur $N = 91$ Werten beschränken. Im Gegensatz zu dieser jährlichen Serie, enthält die partielle Serie auch Ereignisse, mit deren Auftreten im Mittel mehrmals pro Jahr zu rechnen ist.

Empirische Häufigkeitsverteilungen $h(x)$ sind nur vergleichbar, wenn man sie normiert, wenn also

$$\frac{h(x)}{N} = \varphi(x) \quad (2.2)$$

gesetzt wird, was für die normierten Häufigkeiten $\varphi(x_i)$

$$\sum_{i=1}^N \varphi(x_i) = 1 \quad (2.3)$$

bedeutet. $\varphi(x)$ nennt man auch (empirische) Verteilungsdichte.

Zu den angestrebten Aussagen über die Wahrscheinlichkeit des Unterschreitens und des Überschreitens bestimmter Werte der Variablen gelangt man durch den Übergang von der diskreten empirischen Verteilung zur stetigen theoretischen Verteilung d. h. es wird versucht, von der Stichprobe auf die Grundgesamtheit zu schließen.

Analog zu $\varphi(x)$ wird für die normierte theoretische Häufigkeitsverteilung (Verteilungsdichte) das symbolische Kürzel $f(x)$ verwendet. Nach dem in Abb. 2.1 dargestellten aus der Hydrologie bekannten Verlauf von $\varphi(x)$ wird von $f(x)$ gefordert:

- Stetigkeit
- $f(0) = 0$. Dies bedeutet, daß die Realisierung $f(0) > 0$ i. a. auszuschließen ist (der betrachtete Pegel fällt nicht ganzjährig trocken) oder nur den Ausnahmefall darstellt (aride oder semiaride Gebiete). Dagegen ist $f(0) > 0$ für monatliche Niederschlagssummen und tägliche Lufttemperaturen in humiden Gebieten die Regel.
- $f(x)$ ist eine eingipflige Funktion. Den Abszissenwert des Maximums nennt man Modus oder Modalwert (s. u.)
- Mit wachsendem x nähert sich $f(x)$ asymptotisch dem Wert Null ($f(x) \rightarrow 0$ mit $x \rightarrow \infty$). Die Diskussion, daß oberhalb eines bestimmten Wertes x_G $f(x) = 0$ wird ($f(x) \geq x_G = 0$), soll hier nicht geführt werden. Man nennt in der Hydrologie diesen Grenzwert den wahrscheinlich maximalen Abfluß PMF. Zur analytischen Abschätzung von PMF könnte eine nach oben begrenzte Verteilungsfunktion verwendet werden (BETA 1. Art oder JOHNSON).

Grundsätzlich gibt es unendlich viele Funktionen, die diese Voraussetzungen erfüllen. Eine Auswahl von Funktionen, die für hydrologische Zwecke geeignet sind, wird in Abschnitt 4 vorgestellt.

Der Weg von der Verteilungsdichte (normierte Häufigkeitsverteilung) zur Verteilungsfunktion und damit zur Wahrscheinlichkeit führt über die Integration

$$F(x) = \int_{x=x_A}^x f(x) dx \quad (2.4)$$

bzw.

$$\Phi(x_L) = \sum_{i=1}^L \varphi(x_i) \quad (2.5)$$

Dabei wird in (2.5) bis zum Intervall L summiert bzw. in (2.4) von der unteren Grenze x_A bis x integriert.

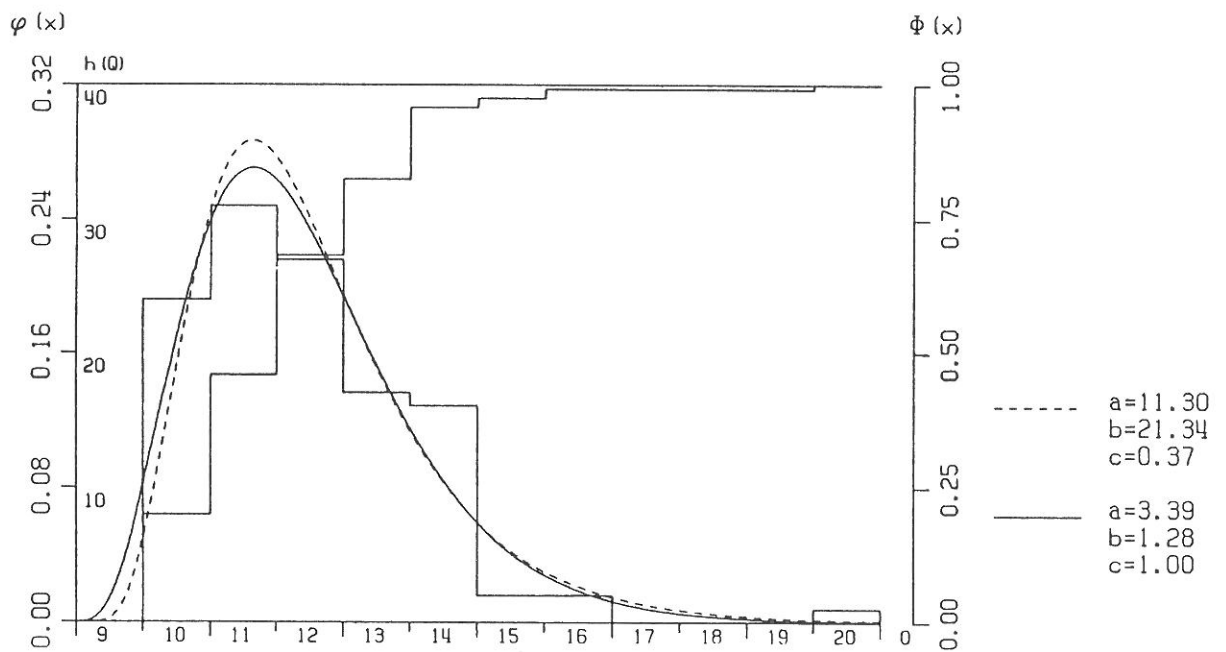


Abb. 2.1 $\varphi(x)$, $h(Q)$, $\Phi(x)$ und die angepassten Gammaverteilungen, Pegel Maxau

Abb. 2.1 zeigt die empirischen Häufigkeitsverteilungen $\varphi(x)$ und $h(Q)$ sowie die empirische Häufigkeitsverteilung $\Phi(x)$ auf der Basis der 120 Spitzendurchflüsse 1871-1990 am Pegel Maxau (Ausbauzustand 1977). Die Werte sind der späteren Tab. 6.1 entnommen, in Abschnitt 6 wird auch auf die beiden eingezeichneten theoretischen Dichtefunktionen Bezug genommen.

Die mathematischen Eigenschaften der Verteilungsfunktion sind

$$\Phi(x) = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases} \text{ für } i = \begin{cases} 0 \\ N \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_a} F(x) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$$

oder für $F(x)$

- $F(x)$ wächst monoton mit $x \rightarrow \infty$
- $F(x)$ ist im allgemeinen stetig und differenzierbar.

Da Dichtefunktionen anschaulicher darzustellen und leichter zu handhaben sind als Verteilungsfunktionen, wird eine stetige Verteilung meist über ihre Dichte charakterisiert.

$F(x)$ ist die sog. Unterschreitungswahrscheinlichkeit $P(X < x)$ der Zufallsvariablen X , oft schreibt man deutlicher $F(X \leq x)$. Für die sog. Überschreitungswahrscheinlichkeit verbleibt daher $F(X \geq x) = 1 - F(x)$. Für den Fall jährlicher Spitzenereignisse in T Jahren gilt

$$P(X \geq x) = \frac{1}{T} \quad (2.6a)$$

und folglich

$$P(X < x) = 1 - \frac{1}{T} = \frac{T-1}{T} \quad (2.6b)$$

F wird durch Φ geschätzt und hier traditionell mit P bezeichnet (*Probability*). Es wird im langjährigen Mittel der Wert x aller T Jahre erreicht oder überschritten, wobei man T Wiederholungszeitspanne, Wiederholzeit, Wiederkehrintervall, Jährlichkeit oder Kehrzeit (return period, recurrence interval) nennt.

Es ist ersichtlich, daß eine (integrierbare) Funktion $f(x)$ nur dann Dichtefunktion einer stetigen Verteilungsfunktion sein kann, wenn sie die folgenden Eigenschaften aufweist:

$$f(x) \geq 0 \text{ für alle } x$$

und

$$\int_B f(x) dx = 1 \quad B: \text{Definitionsbereich von } f(x)$$

So bedeutet z. B. die Angabe: $f(x) = 1/9, 0 \leq x \leq 9$ (Gleichverteilung im Intervall 0 bis 9) eigentlich genauer:

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \text{ für } x < 0 \\ f(x) &= 1/9 \text{ für } 0 \leq x \leq 9 \\ f(x) &= 0 \text{ für } x > 9 \end{aligned}$$

und somit:

$$\begin{aligned} F(x) &= 0 \text{ für } x < 0 \\ F(x) &= x/9 \text{ für } 0 \leq x \leq 9 \\ F(x) &= 1 \text{ für } x > 9 \end{aligned}$$

Dies gilt analog für alle Dichtefunktionen, die auf Intervallen angegeben werden. Außerhalb dieser Intervalle ist das Verhalten von Dichte- und Verteilungsfunktion immer gleich, sodaß eine Betrachtung auf dem angegebenen Intervall völlig ausreicht. Für obiges Beispiel sind also die Angaben

$$f(x) = 1/9, 0 \leq x \leq 9 \quad \text{und} \quad F(x) = x/9, 0 \leq x \leq 9$$

unmißverständlich und daher völlig ausreichend.

2.2 Kenngrößen (Kennzahlen) von Verteilungen

Wir betrachten die empirische Dichteverteilung $\varphi(x)$ einer Zufallsvariablen X. Die theoretische Dichteverteilung, also die Anpassung an die Grundgesamtheit, sei $f(x)$. Die Analytik von $f(x)$ und ihre Entwicklung aus $\varphi(x)$ wird in Abschnitt 4 beschrieben.

Im Folgenden sollen eingipflige Verteilungen behandelt werden mit den in Abschnitt 2.1 bereits aufgeführten Eigenschaften. Darüberhinaus sei $f(x)$ auch differenzierbar.

Die mathematische Statistik hat sog. Kenngrößen (Kennzahlen) entwickelt, die es erlauben, die Dichtefunktionen $\varphi(x)$ und $f(x)$ und darüberhinaus auch die entsprechenden Verteilungsfunktionen $\Phi(x)$ und $F(x)$ anschaulich zu kennzeichnen. Es sei aber ausdrücklich darauf hingewiesen, daß aus mathematischer Sicht die Begriffe Kenngröße und Parameter identisch sind. Aus Sicht der Systematik scheint es aber sinnvoll, bei der folgenden Beschreibung von Verteilungen von *Kenngrößen* zu sprechen.

Die augenfälligste Kenngröße ist der **Modus** D , auch Modalwert, dichtester Wert, Maximum, Scheitelpunkt, Maximum der Dichtefunktion (Verteilungsdichte) genannt.

Man erhält den Modus von $f(x)$ über $f'(x) = 0$.

Die seltener benutzte Kenngröße **Median** Me ist definiert als

$$F(Me) = 0,5 \text{ bzw. } \Phi(Me) = 0,5$$

Für die genannte Zeitreihe von Durchflüssen am Pegel Maxau ist für $\Phi(Q = Me) = 0,5$ $Me \approx 3410 \text{ m}^3/\text{s}$, d. h. ca. 50 % der Durchflüsse sind kleiner als $3410 \text{ m}^3/\text{s}$, 50 % größer. Als weitere Maßzahlen werden die von der Mechanik übernommenen sog. Momente verwendet. Die gebräuchlichsten sind Mittelwert, Varianz, Schiefe und Exzeß.

Es sei auf Lehrbücher der (theoretischen) Mechanik und der Statistik verwiesen [z. B. Kreyszig 1988], wonach das k te Moment von $f(x)$ bezüglich $x = c$ die Form hat

$$M_k^{(c)} = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - c)^k f(x) dx \quad (2.7)$$

Den **Mittelwert** von x , auch **Erwartungswert** genannt, erhält man für $c = 0$ und $k = 1$:

$$m_y = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx \quad (2.8)$$

Analog zu (2.8) setzt ($N =$ Stichprobenumfang):

$$\bar{x} = m = \sum_{i=1}^N x_i \varphi(x_i) \quad (2.9)$$

Zu (2.9) sei nochmals bemerkt, daß $\varphi(x)$ entsprechend (2.3) bereits normiert ist, so daß der Mittelwert direkt als Summe der Produkte folgt.

Das Moment 2. Ordnung, also mit $k = 2$ wird auf den Mittelwert $c = \mu$ bzw. $c = m$ bezogen. Es ist die **Varianz** (Dispersion, Streuung):

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - my)^2 f(x) dx \quad (2.10)$$

bzw.

$$s^2 = \sum_{i=1}^N (x_i - m)^2 \varphi(x_i) \quad (2.11)$$

Die Varianz mißt die durchschnittliche quadratische Abweichung vom Erwartungswert. Die Wurzel aus der Varianz wird **Standardabweichung** σ bzw. s genannt. Bei kleiner Varianz bündeln sich die Werte eng um Modus und Mittelwert, bei großer Varianz ist der Verlauf der Verteilungsdichte dagegen flach.

Die **Schiefe** ist das dritte Moment ($k = 3$) bezogen auf den Mittelwert:

$$C_s = \frac{1}{\sigma^3} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - my)^3 f(x) dx \quad (2.12)$$

bzw.

$$c_s = \frac{1}{s^3} \sum_{i=1}^N (x_i - m)^3 \varphi(x_i) \quad (2.13)$$

Im Gegensatz zur Varianz bleiben hier die Vorzeichen der Abweichungen erhalten. Durch die dritte Potenz werden große Abweichungen stärker gewichtet als kleine. $1/\sigma^3$ und $1/s^3$ sind Normierungsfaktoren. Die Schiefe ist also ein Maß dafür, ob Abweichungen nach rechts oder nach links überwiegen.

Der **Exzeß** ist das vierte Moment ($k = 4$) bezogen auf den Mittelwert:

$$E = \frac{1}{\sigma^4} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - my)^4 f(x) dx \quad (2.14)$$

bzw.

$$e = \frac{1}{s^4} \sum_{i=1}^N (x_i - m)^4 \varphi(x_i) \quad (2.15)$$

Oft wird $E = E - 3$ und $e = e - 3$ gesetzt. Damit ist ein direkter Vergleich mit der Normalverteilung möglich. Die Dichtefunktion ist dann für $E < 0$ flacher und für $E > 0$ steiler als die der entsprechenden Normalverteilung.

3. TRANSFORMATIONEN STETIGER VERTEILUNGEN

3.1 Kenngrößen, Parameter und Variable

Der Begriff *Kenngröße* wurde in Abschnitt 2.2 erklärt. Die Begriffe *Parameter* und *Variable* sollen zunächst am Beispiel der Normalverteilung erläutert werden:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} a} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2a^2}} \quad -\infty < x < \infty \quad (3.1)$$

Die Dichtefunktion enthält die beiden Parameter a und x_0 . Wenn man in (3.1) bei konstantem x_0 den Parameter a vergrößert, so wird das Bild von $f(x)$ dadurch flacher. Analog wird es für kleinere a steiler. Man nennt einen solchen Parameter, der Einfluß auf die Form der Verteilung hat, auch Form- oder Gestaltparameter (englisch: shape parameter). Darüber hinaus nennt man den Formparameter c , der als $c \cdot x$ den Maßstab verändert auch Skalenparameter (scale parameter).

Anders der Parameter x_0 . Seine Veränderung bewirkt keine andere Form der Verteilung sondern lediglich eine Verschiebung parallel zur x -Achse und zwar für wachsendes x_0 nach rechts. Einen Parameter, der dies leistet, wird Verschiebungs- oder Translationsparameter genannt (englisch: location parameter). Er läßt sich in jeder Verteilung einführen, indem man einfach x durch $(x-x_0)$ ersetzt. Im Folgenden werden Translationsparameter i . a. nicht berücksichtigt und Formparameter mit a , b , c bezeichnet - es sei denn, daß aus historischen oder inhaltlichen Gründen eine andere Bezeichnung angebracht erscheint.

Bei einfachen Verteilungen läßt sich ein Parameter auch als Funktion von Kenngrößen angeben. In (3.1) ist dies besonders einfach:

$$a = \delta \quad \text{und} \quad x_0 = \mu.$$

Der Begriff *Variable* ist keinerlei Mißverständnissen unterworfen. Es dürfen alle Werte des Definitionsbereichs eingesetzt werden. Für *Variable* steht in dieser Abhandlung vorwiegend x , manchmal auch (in Zwischenschritten) t , u oder v .

Es gibt mehrere Möglichkeiten aus einer stetigen Verteilung eine neue zu gewinnen. Die gebräuchlichsten sind:

- Parameterspezifikation
- Parametertransformation
- Variablentransformation

3.2 Parameterspezifikation

Einem oder mehreren Parametern wird/werden spezielle Werte zugewiesen.

Beispiele:

- Für $\mu = 0$ und $\sigma = 1$ wird aus der Normalverteilung die Standardnormalverteilung
- Für $c = 1$ wird aus der Hypergammaverteilung die Gammaverteilung

3.3 Parametertransformation

Ein Parameter wird durch einen anderen oder durch eine Kombination von Parametern ersetzt.

Beispiele:

- Für $a = b^c$ wird aus der Goodrichverteilung die in Abschnitt 4 unter *Bemerkungen* aufgeführte Form der Frechetverteilung
- Für $b = 1/2$ und $a = (v-2)/2$ wird aus der Gammaverteilung die Chi-Quadrat-Verteilung

3.4 Variablentransformation

Die Variable in der Verteilungsfunktion (nicht Verteilungsdichte) wird durch eine differenzierbare, streng monotone Abbildung transformiert. Beispiele:

- Durch $x \Rightarrow \ln x$ wird aus der Normalverteilung die Lognormalverteilung.
- Durch $x \Rightarrow e^x$ wird aus der Frechetverteilung die Gumbelverteilung.

Sowohl Parameterspezifikation als auch Parametertransformation ändern den Verteilungstyp nicht. Anders bei der Variablentransformation, wo man i. a. einen anderen Verteilungstyp erhält. Im Folgenden soll daher die Variablentransformation genauer untersucht werden.

Gegeben sei die Dichtefunktion einer stetigen Verteilung $f(x)$ im Intervall (x_A, x_B) . Es gilt also, die Variable x durch $x = t(u)$ in eine neue Variable u zu transformieren. Gesucht sind die neue Dichte $g(u)$ und das neue Definitionsintervall (α, β) .

$$\text{Es muß gelten: } \int_{\alpha}^{\beta} g(u) du = 1$$

$$\text{Aus } x = t(u) \text{ folgt } u = t^{-1}(x) \text{ und} \quad (3.2)$$

$$\text{aus } \frac{dx}{du} = t'(u) \text{ folgt } dx = t'(u) du \quad (3.3)$$

Mit den Regeln der Integration durch Substitution ergibt sich daraus:

$$\int_{\gamma}^{\delta} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(t(u)) t'(u) du = \int_{\alpha}^{\beta} g(u) du$$

$$\begin{aligned} \text{mit: } \gamma &= t(\alpha) \\ \delta &= t(\beta) \\ \alpha &= t^{-1}(\gamma) \\ \beta &= t^{-1}(\delta) \\ g(u) &= f(t(u)) t'(u) \end{aligned}$$

Bemerkungen:

- Die Transformation $x = t(u)$ muß streng monoton sein, damit die Umkehrfunktion $u = t^{-1}$ existiert
- Die Transformation $x = t(u)$ muß differenzierbar sein, damit die Ableitung $t'(u)$ existiert
- Die Umkehrfunktion t^{-1} muß auf dem ganzen Intervall (α, β) definiert sein, damit γ und δ existieren.

Ist die Transformation t streng monoton wachsend, so gilt $t' > 0$ und $\gamma < \delta$. Ist t dagegen streng monoton fallend, so wird t' negativ und $\gamma > \delta$. In diesem Fall wird durch Vertauschen der Integrationsgrenzen γ und δ der Integrand (die Dichtefunktion) wieder positiv.

Die wichtigsten Transformationen sind:

$x = u - u_0$	Verschiebung
$x = \delta u$	Streckung, i. a. $\delta > 0$
$x = \delta u - u_0$	linear, i. a. $\delta > 0$
$x = \ln u$	Logarithmieren
$x = u^\xi$	Potenzieren, $\xi > 0$
$x = e^\xi$	Exponenzieren
$x = 1/u$	Kehrwert

In der Praxis wird u stillschweigend wieder durch x ersetzt.

Ob eine der genannten Transformationen bei einer konkret gegebenen Verteilung möglich ist, hängt wesentlich von ihrem Definitionsbereich ab.

- Verschieben einer Verteilung ist immer möglich und völlig problemlos
- Auch andere lineare Transformationen sind stets möglich. Populärstes Beispiel ist die Standardisierung $x = \sigma u + \mu$, wobei μ der Erwartungswert und σ die Standardabweichung der Verteilung ist
- Logarithmieren ist im Grunde ebenfalls immer möglich, aber nur sinnvoll, wenn der Definitionsbereich der Verteilung von $-\infty$ bis $+\infty$ reicht. Der neue Definitionsbereich ist dann das Intervall von 0 bis $+\infty$
- Potenzieren ist im Allgemeinen nur im Positiven sinnvoll. Ist der Definitionsbereich $0 \leq x < \infty$, so bleibt er bei der Transformation erhalten
- Exponenzieren ist nur im Positiven möglich. Der Definitionsbereich $0 \leq x < \infty$ wird dann zum Intervall von $-\infty$ bis $+\infty$ (vergl. Logarithmieren)
- Kehrwert bilden ist nur möglich, wenn 0 nicht im Definitionsbereich enthalten ist. Ist der Definitionsbereich $0 < x < \infty$, so bleibt er bei der Transformation erhalten.

In Tab. 3.1 sind die wichtigsten Transformationen mit Transformationsgleichung $x = t(u)$, Umkehrfunktion $t^{-1}(x)$, Ableitung $t'(x)$ und den sinnvollen Definitionsbereichen vor und nach der Transformation zusammengestellt.

Verschiebung: $x = t(u) = -u_0$

$$\begin{array}{lll} u = t^{-1}(x) = x + u_0 & -\infty < x < \infty & \Rightarrow -\infty < u < \infty \\ t'(u) = 1 & 0 < x < \infty & \Rightarrow u_0 < u < \infty \end{array}$$

Streckung: $x = t(u) = b u$

$$\begin{array}{lll} u = t^{-1}(x) = 1/b x & -\infty < x < \infty & \Rightarrow -\infty < u < \infty \\ t'(u) = b & 0 < x < \infty & \Rightarrow 0 < u < \infty \end{array}$$

Logarithmierung: $x = t(u) = \ln u$

$$\begin{array}{lll} u = t^{-1}(x) = e^x & -\infty < x < \infty & \Rightarrow 0 < u < \infty \\ t'(u) = 1/u & & \end{array}$$

Potenzieren: $x = t(u) = u^c$

$$\begin{array}{lll} u = t^{-1}(x) = x^{1/c} & 0 < x < \infty & \Rightarrow 0 < u < \infty \\ t'(u) = c u^{c-1} & & \end{array}$$

Exponenzieren: $x = t(u) = e^u$

$$\begin{array}{lll} u = t^{-1}(x) = \ln x & 0 < x < \infty & \Rightarrow -\infty < u < \infty \\ t'(u) = e^u & & \end{array}$$

Exponenzieren allgemein: $x = t(u) = e^{-b u}$ *Achtung: fallend!*

$$\begin{array}{lll} u = t^{-1}(x) = -1/b \ln x & 0 < x < \infty & \Rightarrow -\infty < u < \infty \\ t'(u) = -b e^{-b u} & & \end{array}$$

Kehrwert: $x = t(u) = 1/y$ *Achtung: fallend!*

$$\begin{array}{lll} u = t^{-1}(x) = 1/x & 0 < x < \infty & \Rightarrow 0 < u < \infty \\ t'(u) = -u^{-2} & & \end{array}$$

Tab. 3.1 Variablen-Transformation bei stetigen Verteilungen

3.5 Beispiele für Variablentransformationen bei stetigen Verteilungen

3.5.1 Normalverteilung

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} e^{-\frac{(x-my)^2}{2\sigma^2}} \quad -\infty < x < \infty$$

Transformation:

a) Standardisierung:

$$x = t(u) = \mu + \sigma u \quad \text{also } u = \frac{x-my}{\sigma} \quad \text{und } t'(u) = \sigma$$

$$\text{somit } g(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} \quad -\infty < u < \infty$$

Dies ist die Dichte der Standardnormalverteilung (Abschnitt 4).

b) Logarithmierung:

$$x = t(u) = \ln u \quad \text{also } u = e^x \quad \text{und } t'(u) = \frac{1}{u}$$

$$\text{somit } g(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} \frac{1}{u} e^{-\frac{(\ln u - my)^2}{2\sigma^2}} \quad 0 < u < \infty$$

Dies ist die Dichte der Lognormalverteilung (Abschnitt 4).

3.5.2 Exponentialverteilung

$$f(x) = a e^{-a x} \quad 0 < x < \infty$$

Transformation:

a) Verschiebung:

$$x = t(u) = u - u_0 \quad \text{also } u = x + u_0 \quad \text{und } t'(u) = 1$$

$$\text{somit } g(u) = a e^{-a(u-u_0)} \quad u_0 < u < \infty$$

b) Streckung:

$$x = t(u) = b u \quad \text{also } u = \frac{1}{b} x \text{ und } t'(u) = b$$

$$\text{somit } g(u) = a b e^{-a b u} \quad 0 < u < \infty$$

Die Streckung ist nicht neu, da nur a durch $a b$ ersetzt ist.

c) Logarithmierung:

$$x = t(u) = \ln u \quad \text{also } u = e^x \text{ und } t'(u) = \frac{1}{u}$$

$$\text{somit } g(u) = \frac{a}{u^{a+1}} \quad 0 < u < \infty$$

Um 1 nach rechts verschoben:

$$g(u) = \frac{a}{(u-1)^{a+1}} \quad 1 < u < \infty$$

So wird z. B. bei der Loggamma- und Lognormalverteilung vorgegangen.

d) Potenzieren:

$$x = t(u) = u^c \quad \text{also } u = x^{1/c} \text{ und } t'(u) = c u^{c-1}$$

$$\text{somit } g(u) = a c u^{c-1} e^{-a u^c} \quad 0 < u < \infty$$

Dies ist die Verteilung von Fréchet, Weibull und Goodrich (Abschnitt 4).

e) Exponenzieren:

$$x = t(u) = e u \quad \text{also } u = \ln x \text{ und } t'(u) = e^u$$

$$\text{somit } g(u) = a e^u e^{-a e^u} \quad -\infty < u < \infty$$

f) allgemeines Exponenzieren:

$$x = t(u) = e^{-b u} \quad \text{also } u = -b^{-1} \ln x \text{ und } t'(u) = -b e^{-b u}$$

$$\text{somit } g(u) = a b e^{-b u} e^{-a e^{-b u}} \quad -\infty < u < \infty$$

Achtung: monoton fallend!

Für $a = 1$ ist dies die Gumbelverteilung (Abschnitt 4).

g) Kehrwert:

$$x = t(u) = \frac{1}{u}$$

$$\text{also } u = \frac{1}{x} \text{ und } t'(u) = -\frac{1}{u^2}$$

$$\text{somit } g(u) = -\frac{a}{u^2} e^{-\frac{a}{u}}$$

$$0 < u < \infty$$

Achtung: monoton fallend!

4. ANALYTISCHE ABHANDLUNG DER STETIGEN VERTEILUNGEN

Es ist sinnvoll, die einzelnen Verteilungen in alphabetischer Reihenfolge abzuhandeln, da ein Versuch eines systematischen Aufbaus zu unübersichtlichen Zwängen führt und es sehr erschweren würde, eine bestimmte Verteilung zu finden.

Es werden vermutlich alle in der Hydrologie gebräuchlichen Verteilungen behandelt, sowie einige weitere, die möglicherweise eine sinnvolle Anwendung erwarten lassen, oder die aus Gründen der Historie oder der Systematik nicht verschwiegen werden können.

Folgende Verteilungen werden analytisch behandelt:

Beta, 1.Art	
Beta, 2.Art	
Cauchy	
Chi	
Chi-Quadrat	
Doppelt Exponential Allgemein	
Exponential	
Extremal I	s. Gumbel
Extremal II	s. Frechet
Extremal III	s. Frechet
Extremwert	s. Gumbel
F	
Fechner	s. Lognormal
Foster	s. Gamma
Fischer	s. F
Frechet	
Frechet Exponential	
Fuller	s. Exponential
Galton	s. Lognormal
Gamma	
Gamma Allgemein	s. Hypergamma
Gauss	s. Normal
Gibrat	s. Lognormal
Gleichverteilung	s. Rechteck
Goodrich A	s. Frechet
Gumbel	
Hypergamma	
Johnson	s. Standardnormal
Laplace	
Loggamma	s. Loghypergamma
Loghypergamma	
Lognormal	
Maxwell	
Normal	
Pearson III	s. Gamma
Potenznormal	s. Normal
Rayleigh	
Rechteck	
Rossi	s. Gumbel
Standardnormal	
Student	s. T

- Die einzelnen Verteilungen werden jeweils nach demselben Schema behandelt in der Reihenfolge
- wesentliche Daten wie Dichte, Erwartungswert usw.
 - Bemerkungen mit Hinweisen darauf, aus welcher Verteilung die behandelte Verteilung abgeleitet werden kann (\Leftarrow) und welche aus ihr abgeleitet werden können (\Rightarrow)
 - Plots, die den Einfluß der (Form-) Parameter auf die Dichtefunktion verdeutlichen sollen.

Wie bereits in Abschnitt 3.1 erwähnt, werden die aufgeführten (Form-)Parameter mit a, b, c bezeichnet, es sei denn, daß aus historischen oder inhaltlichen Gründen eine andere Bezeichnung angebracht erscheint. Gültigkeitsbereich und Bezeichnung der Parameter können sich bei der Ableitung einer Verteilungsfunktion aus einer anderen ändern (hier z. B. bei Frechet \rightarrow Gumbel). Für Dichte- und Verteilungsfunktion sowie für die Kenngrößen werden die Bezeichnungen von Abschnitt 2.2 benutzt.

An mehreren Stellen werden die Betafunktion B und die Gammafunktion Γ benutzt. Sie sind wie folgt definiert.

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x) \Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt$$

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

Für $x \in \mathbb{N}$ gilt

$$\Gamma(x) = (x-1)! = (x-1) (x-2) \dots 3 2 1$$

und für Argumente, die im Folgenden Verwendung finden:

$$\Gamma(0,5) = \sqrt{\pi}$$

$$\Gamma(1,5) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

$$\Gamma(2,5) = \frac{3}{4}\sqrt{\pi}$$

$$\Gamma(3,5) = \frac{15}{8}\sqrt{\pi}$$

Die Abb. 4.2 und 4.3 sollen die Zusammenhänge der einzelnen Verteilungen anschaulich verdeutlichen. Abb. 4.2 zeigt, daß es zwei Wurzeln gibt, aus denen sich alle Verteilungen ableiten lassen. Dies sind die Beta- und die Hypergammaverteilung. Brücken zwischen beiden Teilsystemen führen von der Hypergamma- zur Normalverteilung und von der F- zur Chi-Quadrat-Verteilung. Zudem ist das Hypergammasytem 3stöckig aufgebaut: über den Gammaverteilungen liegen die Doppelt-Exponential-Verteilungen (Exponentiation nach Abschnitt 3.4.2, f)), darunter die logarithmischen Verteilungen (Logarithmierung nach Abschnitt 3.4.2, c)). Dies soll insbesondere

in Abb. 4.3 verdeutlicht werden: außerhalb des Kreises liegen die durch Variablentransformation entstandenen Derivate der Hypergammaverteilung.

Verteilung: BETA, 1. Art

Parameter: $p \geq 0, q \geq 0$

Dichtefunktion: $\frac{1}{B(p,q)} x^{p-1} (1-x)^{q-1} \quad 0 < x < 1$

Verteilungsfunktion: $\int_0^x f(t) dt$

Erwartungswert: $\frac{p}{p+q}$

Modus: $\frac{1-p}{2-p-q}$ für $p < 1, q < 1$ oder $p > 1, q > 1$

Varianz: $\frac{p q}{(p+q)^2 (p+q+1)}$

Schiefe: $\frac{2(q-p)}{p+q+2} \sqrt{\frac{p+q+1}{p q}}$

Exzeß: $\frac{6 p(p+1) (p-2q)+q(q+1) (q-2p)}{p q(p+q+2) (p+q+3)}$

Bemerkungen zur BETA-Verteilung der 1. Art:

⇒ *Rechteck*: $p = q = 1$

⇒ *Fischer*: $p = \frac{m}{2}, q = \frac{m}{2}, x \Rightarrow \frac{x}{\frac{n}{m} + x}$

⇒ *Beta, 2. Art*: $x \Rightarrow \frac{1}{1 + x}$

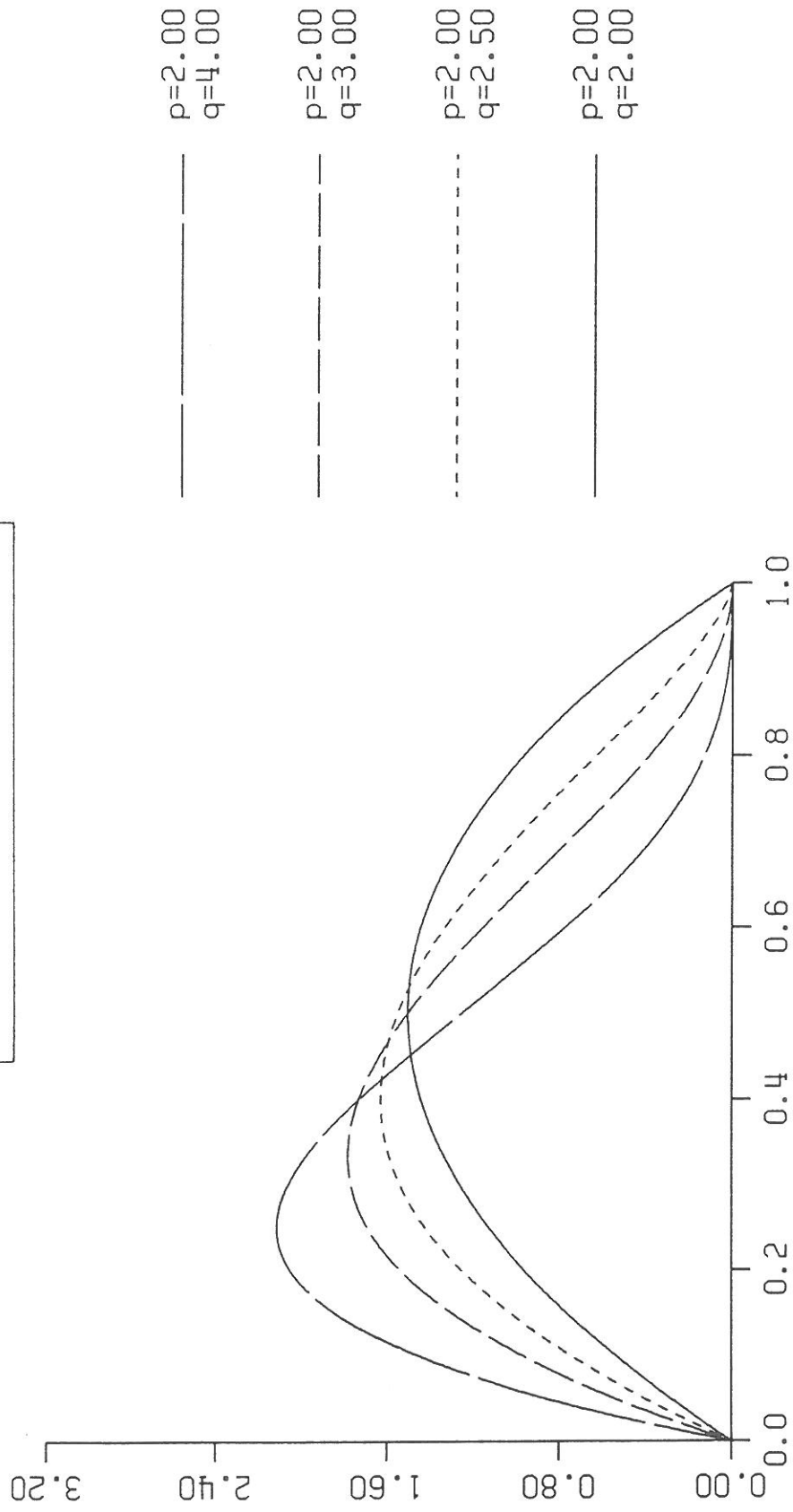
⇒ *Verallgemeinerung durch* $x \Rightarrow \alpha + (\beta - \alpha)x$:

$$f(x) = \frac{(\beta - \alpha)^{1-q-p}}{B(p,q)} (x - \alpha)^{p-1} (\beta - x)^{q-1} \quad \alpha < x < \beta$$

Zur Betafunktion B s. Abschnitt 4, Einleitung.

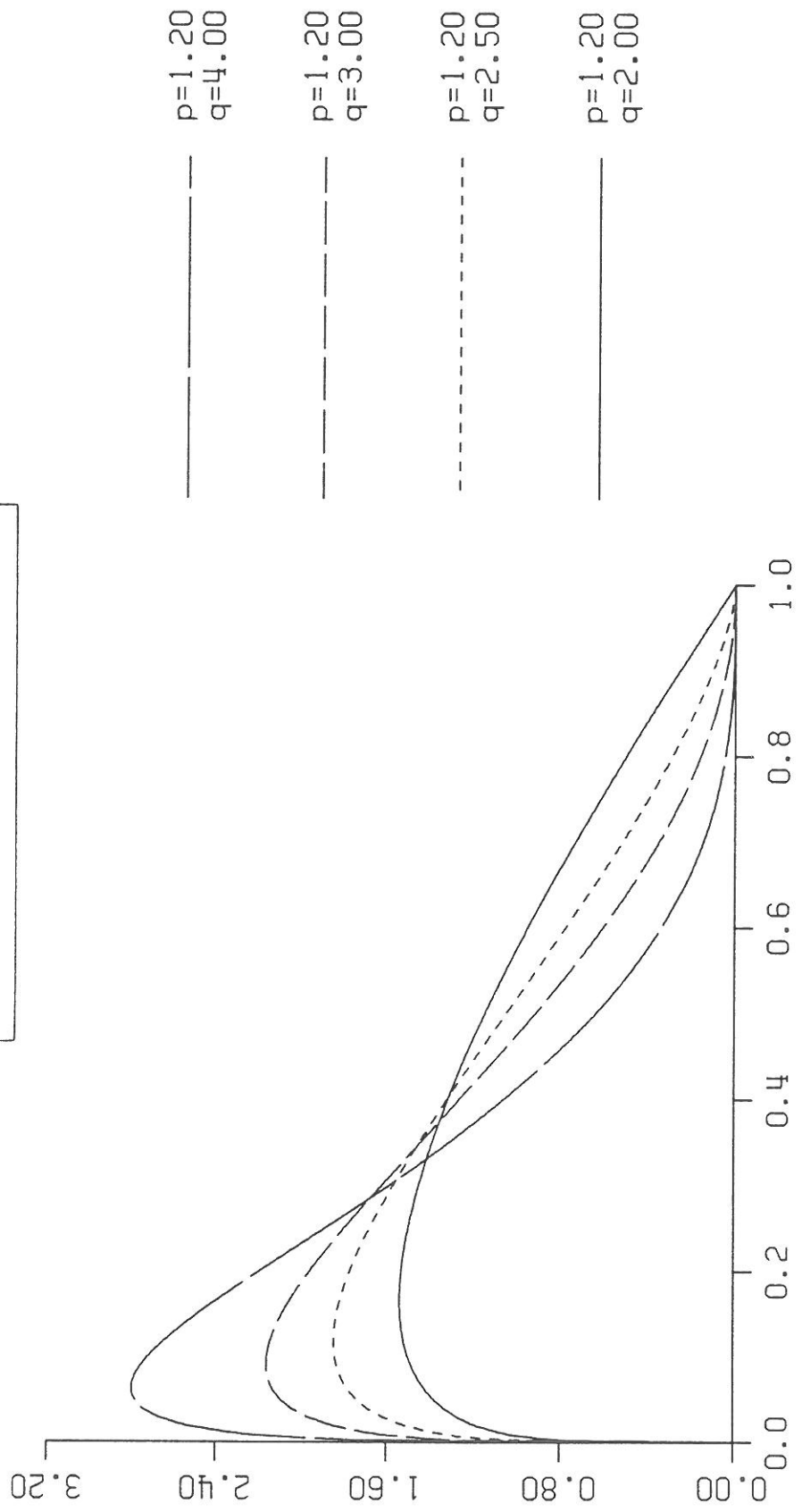
BETA, 1.Art

$$\frac{1}{B(p,q)} x^{p-1} (1-x)^{q-1} \quad 0 < x < 1$$



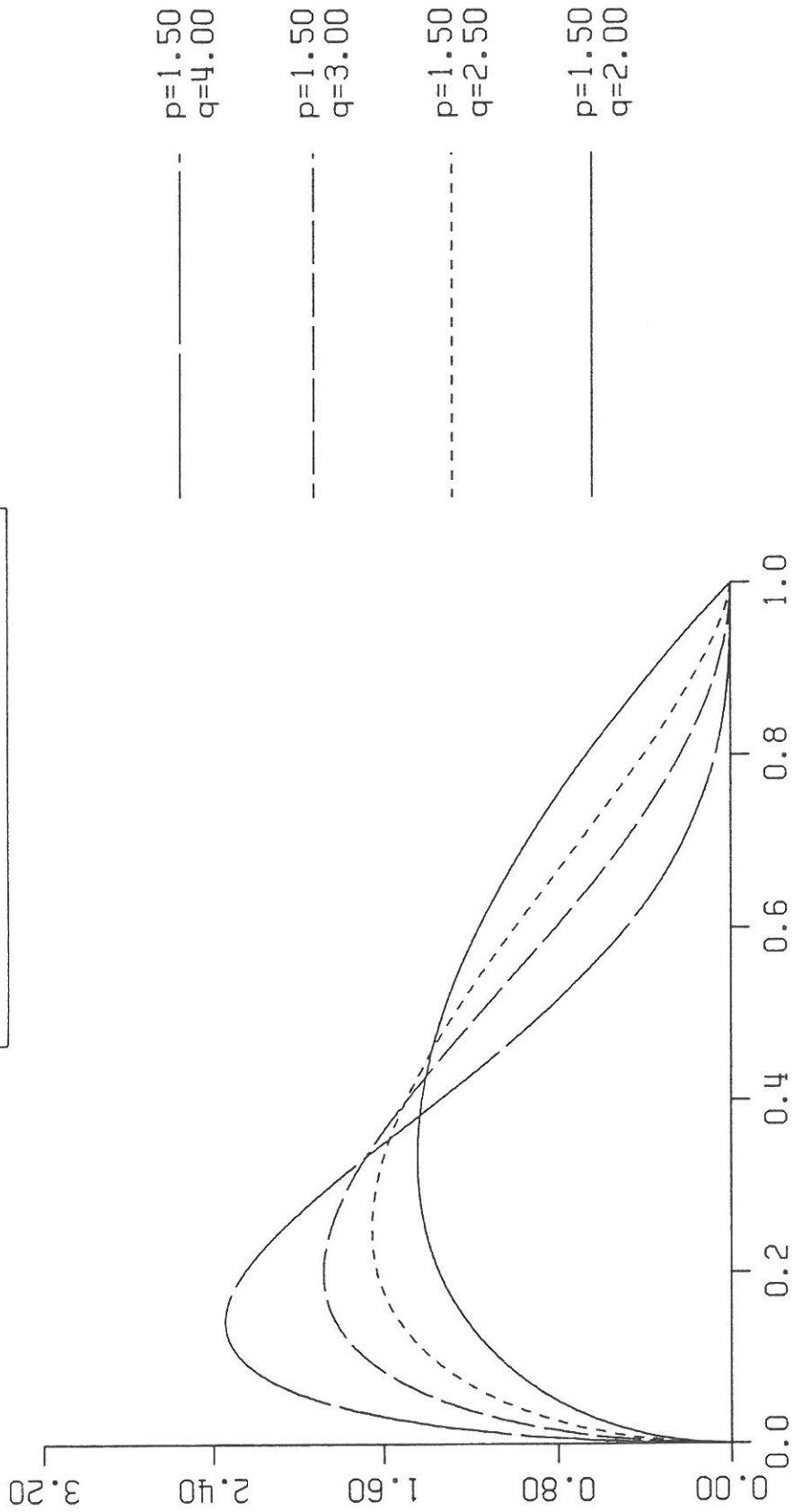
BETA, 1. Art

$$\frac{1}{B(p,q)} x^{p-1} (1-x)^{q-1} \quad 0 < x < 1$$



BETA, 1. Art

$$\frac{1}{B(p,q)} x^{p-1} (1-x)^{q-1} \quad 0 < x < 1$$



Verteilung: BETA, 2.Art

Parameter: $p > 0, q > 0$

Dichtefunktion: $\frac{1}{B(p,q)} x^{p-1} (1-x)^{q-1} \quad x > 0$

Verteilungsfunktion: $\int_0^x f(t) dt$

Erwartungswert: $\frac{p}{p+q} \quad \text{für } p > 1$

Modus: $\frac{p-1}{p+q-1} \quad \text{für } p > 1$

Varianz: $\frac{p(p+q-1)}{(p+q-1)^2 (p+q-2)} \quad \text{für } p > 2$

Bemerkungen zur BETA-Verteilung der 2. Art:

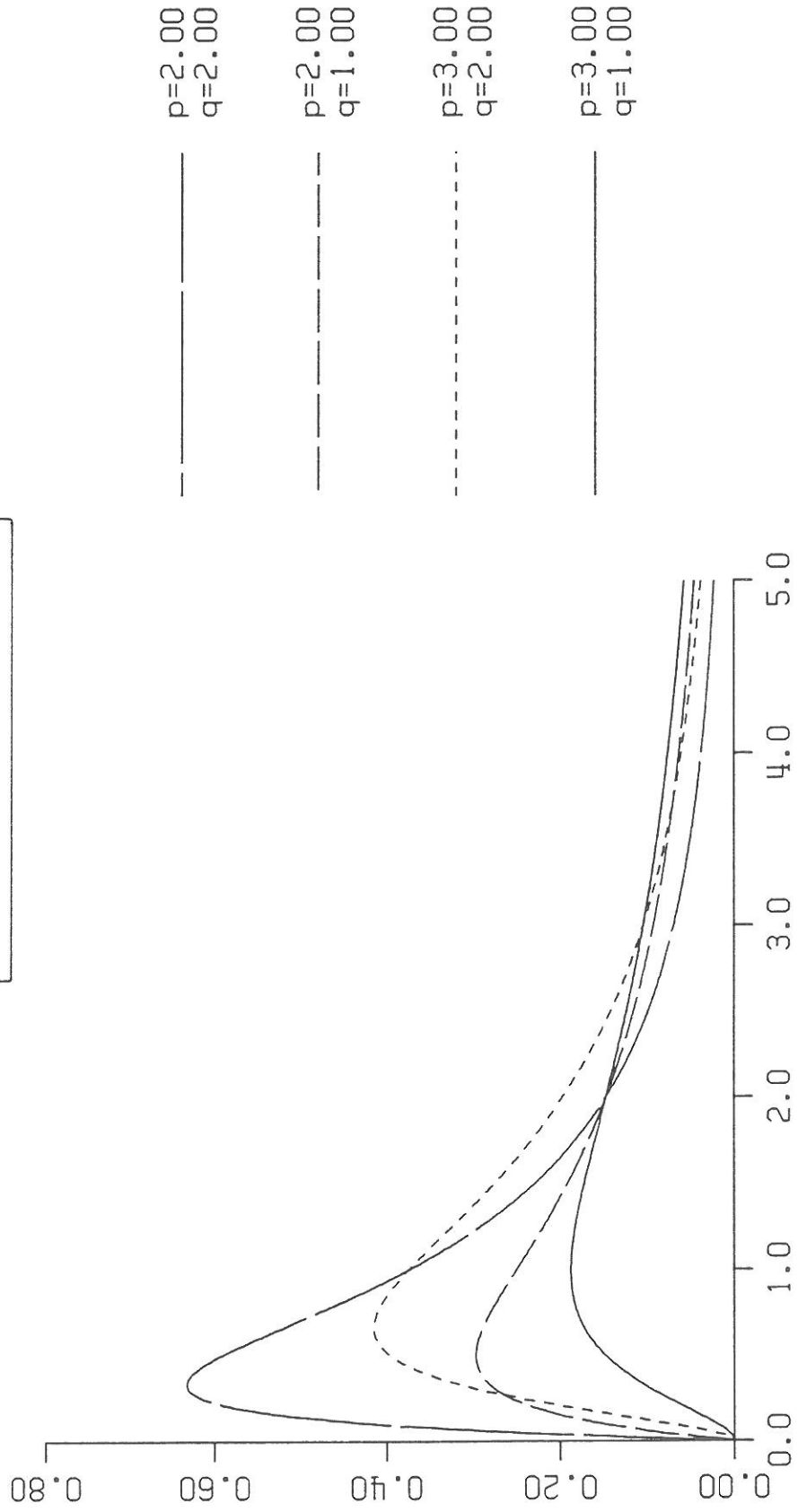
$$\leftarrow \text{Beta (1. Art)} : x \Rightarrow \frac{1}{1+x}$$

$$\Rightarrow F : p = \frac{m}{2}, q = \frac{n}{2}, x \Rightarrow \frac{m}{n}x$$

Bei Bedarf können Cs und E aus (2.12) bzw. (2.14) berechnet werden.
Zur Betafunktion B s. Abschnitt 4, Einleitung

BETA, 2.Art

$$\frac{1}{B(p,q)} x^{p-1} (1-x)^{q-1} \quad x > 0$$



Verteilung: CAUCHY

Parameter: $\lambda > 0$

Dichtefunktion: $f(x) = \frac{1}{\pi\lambda} \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{\lambda}\right)^2} \quad -\infty < x < \infty$

Verteilungsfunktion: $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$

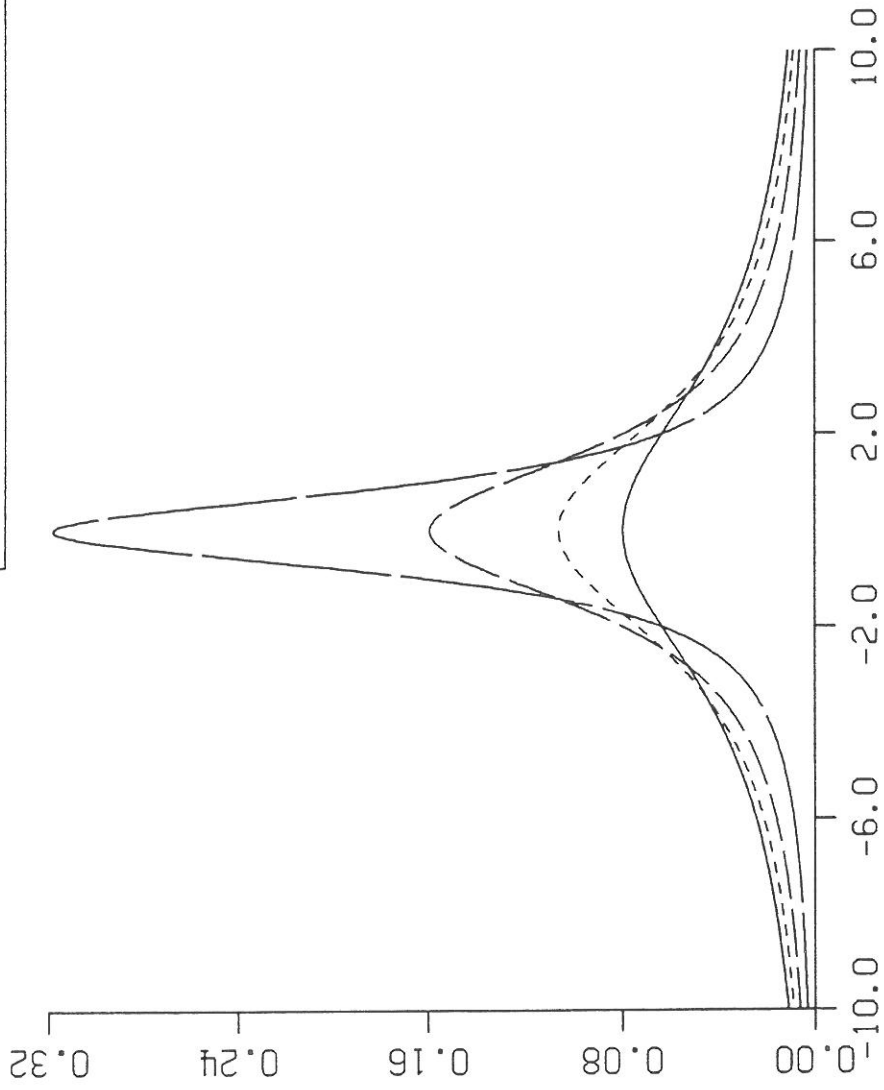
Bemerkungen zur CAUCHY-Verteilung:

Es existieren keine endlichen Momente.

Von der Cauchy-Verteilung sind in der Hydrologie keine Anwendungen bekannt.

CAUCHY

$$f(x) = \frac{1}{\pi\lambda} \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{\lambda}\right)^2} \quad -\infty < x < \infty$$



_____ $\lambda=1.00$

----- $\lambda=2.00$

..... $\lambda=3.00$

_____ $\lambda=4.00$

Verteilung: CHI

Parameter: $n \in N$ (Freiheitsgrade)

Dichtefunktion:
$$\frac{1}{2^{\frac{n}{2}-1} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} x^{n-1} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad x \geq 0$$

Verteilungsfunktion:
$$\int_0^x f(t) dt$$

Erwartungswert:
$$\sqrt{2} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$$

Varianz:
$$n - 2 \frac{\Gamma^2\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{n}{2}\right)}$$

Bemerkungen zur CHI-Verteilung:

$$\Leftarrow \text{Hypergamma: } a = n - 1; b = \frac{1}{2}; c = 2$$

$$\Rightarrow \text{Frechet (mit } b = \frac{1}{2}, c = 2): n = 2$$

$$\Rightarrow \text{Rayleigh (mit } \lambda = 2): n = 2$$

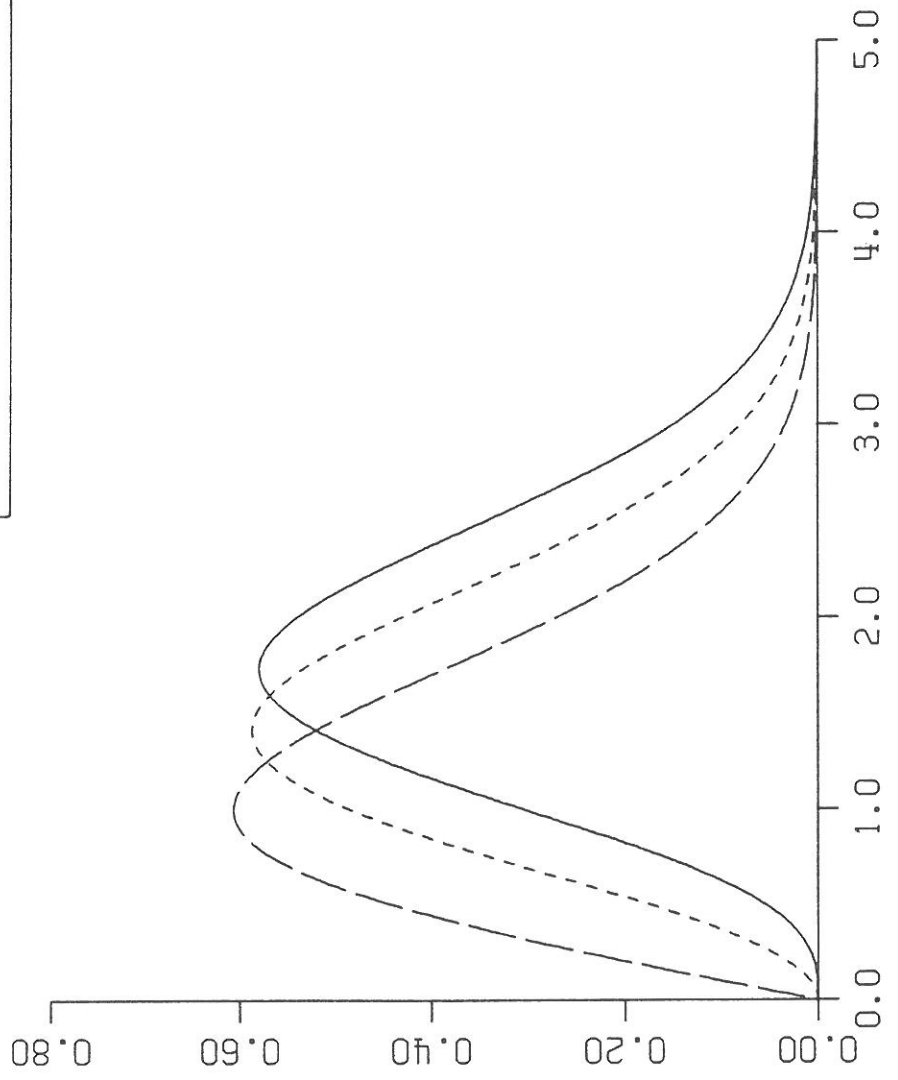
$$\Rightarrow \text{Maxwell (mit } a = 1): n = 3$$

Bei Bedarf kann nach obiger Parameterspezifikation C_s und E aus der Hypergammaverteilung berechnet werden.

Zur Gammafunktion Γ s. Abschnitt 4, Einleitung.

CHI

$$\frac{1}{2^{\frac{n-1}{2}} \Gamma(\frac{n}{2})} x^{n-1} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad x \geq 0$$



Verteilung: **CHI-QUADRAT**

Parameter: $ny \in N$ (*Freiheitsgrade*)

Dichtefunktion:
$$\frac{1}{2^{\frac{ny}{2}} \Gamma\left(\frac{ny}{2}\right)} x^{\frac{ny-2}{2}} e^{-\frac{x}{2}} ; x > 0$$

Verteilungsfunktion:
$$\int_0^x f(t) dt$$

Erwartungswert: ny

Modus:
$$\begin{array}{l} ny - 2 \text{ für } ny > 2 \\ 0 \text{ für } ny = 1 \text{ und } 2 \end{array}$$

Varianz: $2ny$

Schiefe:
$$\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{ny}}$$

Exzeß:
$$\frac{12}{ny}$$

Bemerkungen zur CHI-QUADRAT-Verteilung:

$$\Leftarrow \text{Hypergamma} : a = \frac{ny-2}{2}, b = \frac{1}{2}, c = 1$$

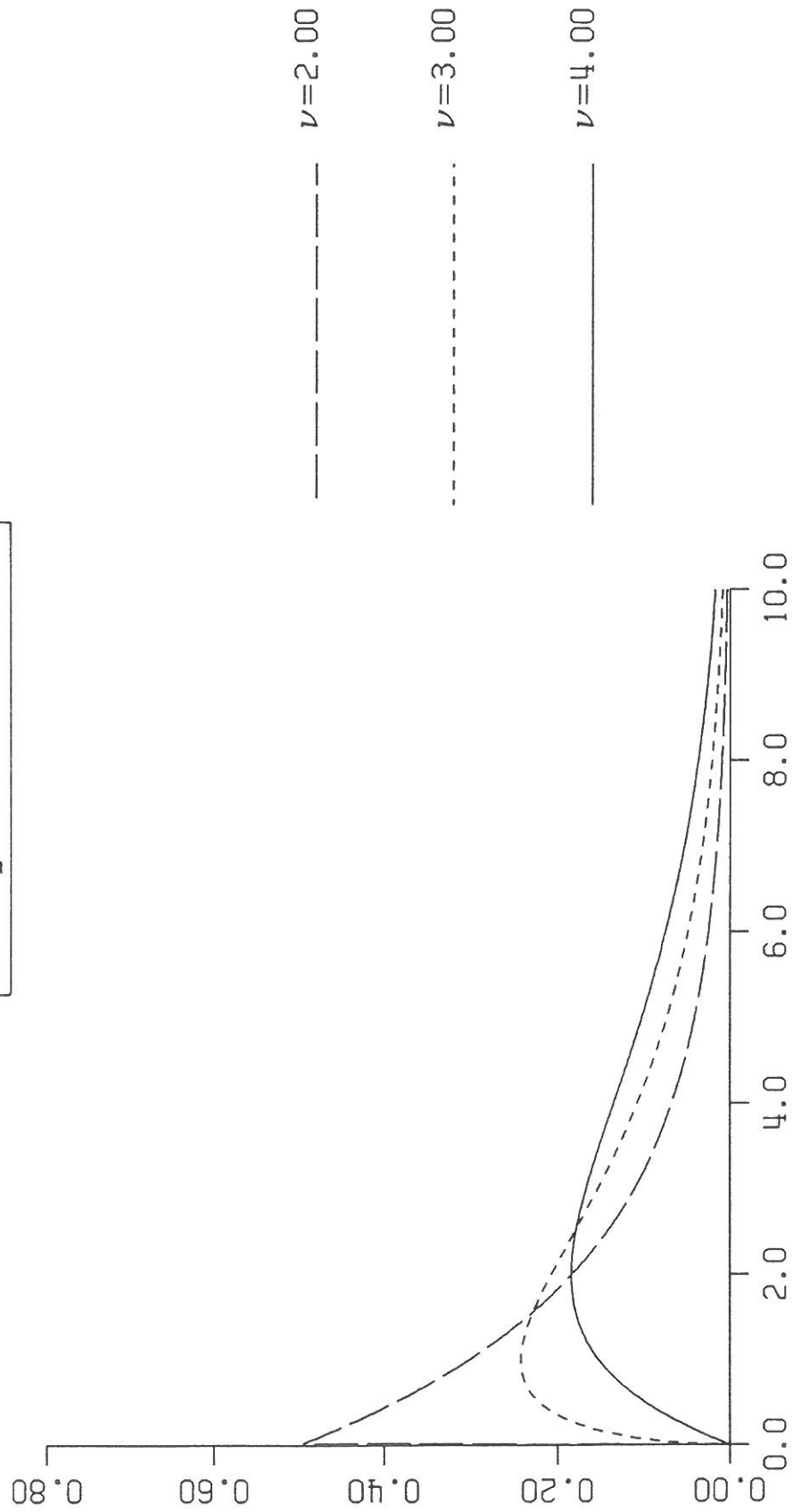
$$\Leftarrow \text{Fischer} : m = ny, n \rightarrow \infty, x \rightarrow \frac{x}{m}$$

$$\Rightarrow \text{Standardnormal} : ny = 1, x \rightarrow x^2$$

Die Chi-Quadrat-Verteilung ist also eine spezielle Gamma-Verteilung, bei der nur ganzzahlige Parameter zugelassen sind. Angewendet wird sie in der Schätz- und Testtheorie. Zur Gammafunktion Γ s. Abschnitt 4, Einleitung.

CHI-QUADRAT

$$\frac{1}{2^{\frac{\nu}{2}} \Gamma(\frac{\nu}{2})} x^{\frac{\nu-2}{2}} e^{-\frac{x}{2}} ; x > 0$$



Verteilung: **DOPPELT EXPONENTIAL ALLGEMEIN**

Parameter: $a > -1, b, c > 0$

Dichtefunktion: $c \frac{b^{\frac{a+1}{c}}}{\Gamma\left(\frac{a+1}{c}\right)} e^{(a+1)x} e^{-be^{cx}} \quad -\infty < x < \infty$

Verteilungsfunktion: $\int_{-\infty}^x f(t) dt$

Modus: $\frac{1}{c} \ln \frac{a+1}{b c}$

Bemerkungen zur DOPPELT EXPONENTIAL-ALLGEMEIN-VERTEILUNG:

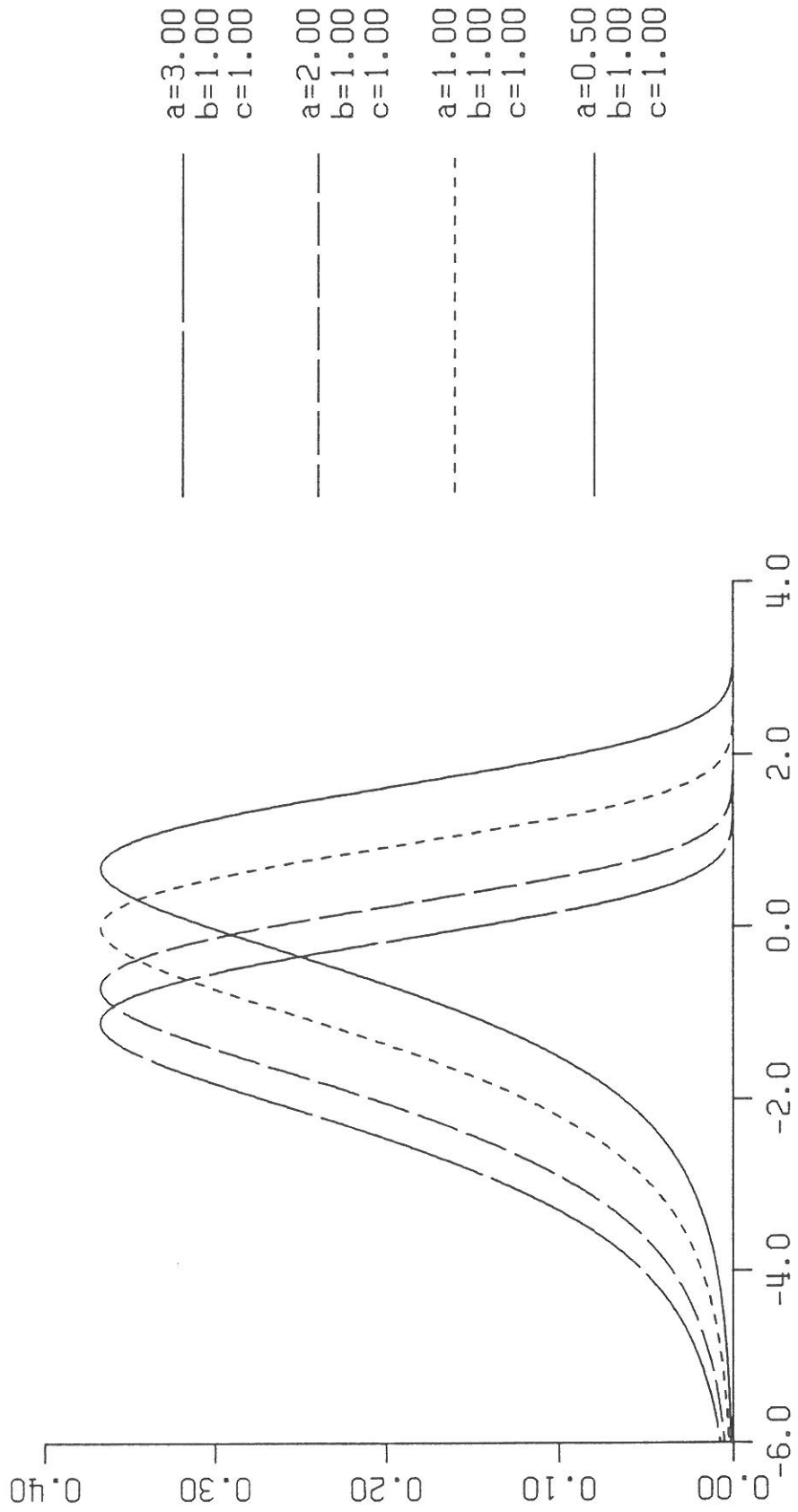
- ⇐ Hypergamma: Anwendung von Abschnitt 3.4.2, f) (Exponentiation)
- ⇒ Frechet Exponential: $c = a + 1$
- ⇒ Gumbel: über Hypergamma

Die allgemeine doppelte Exponentialverteilung ist vermutlich in der Literatur nicht beschrieben. Sie wird hier nur aus Gründen der Systematik aufgeführt.

Zur Gammafunktion Γ s. Abschnitt 4, Einleitung.

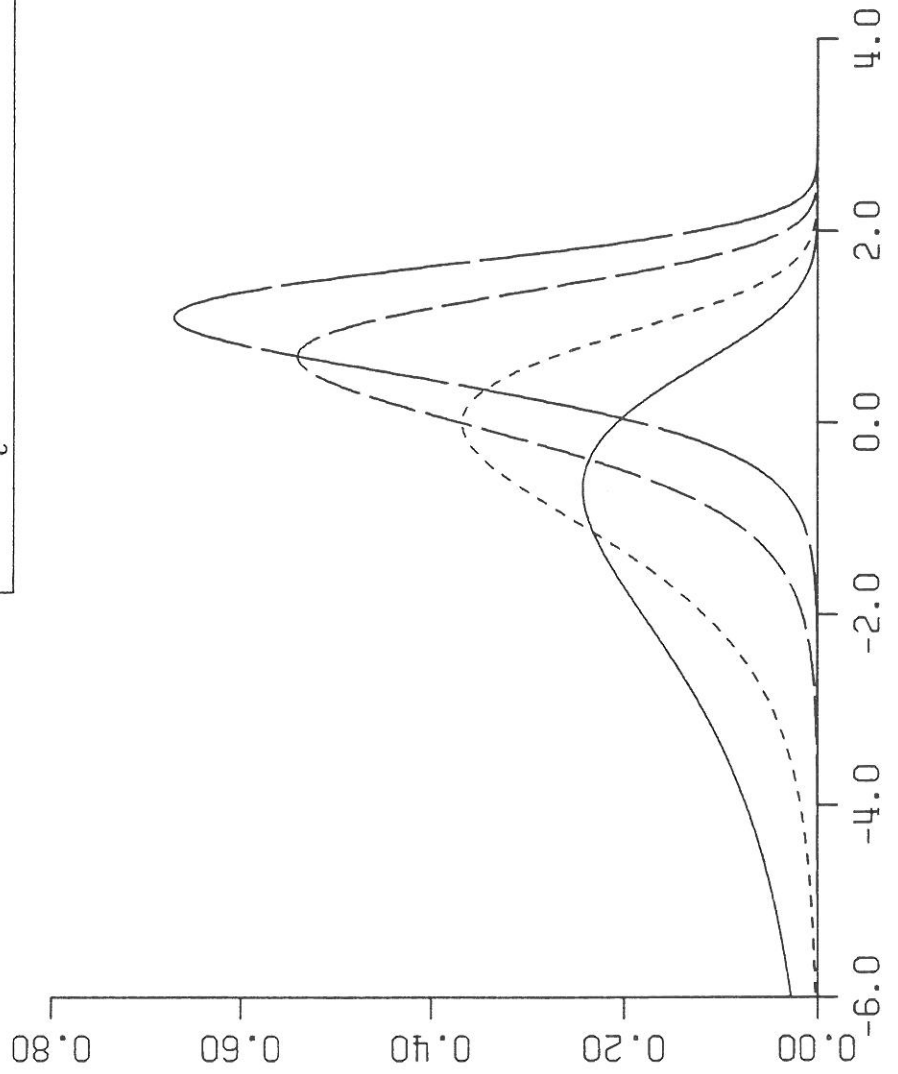
DOPPELT EXPONENTIAL ALLGEMEIN

$$c \frac{b^{\frac{a+1}{c}}}{\Gamma(\frac{a+1}{c})} e^{(a+1)x} e^{-be^{\frac{a+1}{c}x}} \quad -\infty < x < \infty$$



**DOPPELT EXPONENTIAL
ALLGEMEIN**

$$c \frac{b^{-\frac{a+1}{c}}}{\Gamma(\frac{a+1}{c})} e^{(a+1)x} e^{-bx^c} \quad -\infty < x < \infty$$



a=1.00
b=3.00
c=1.00

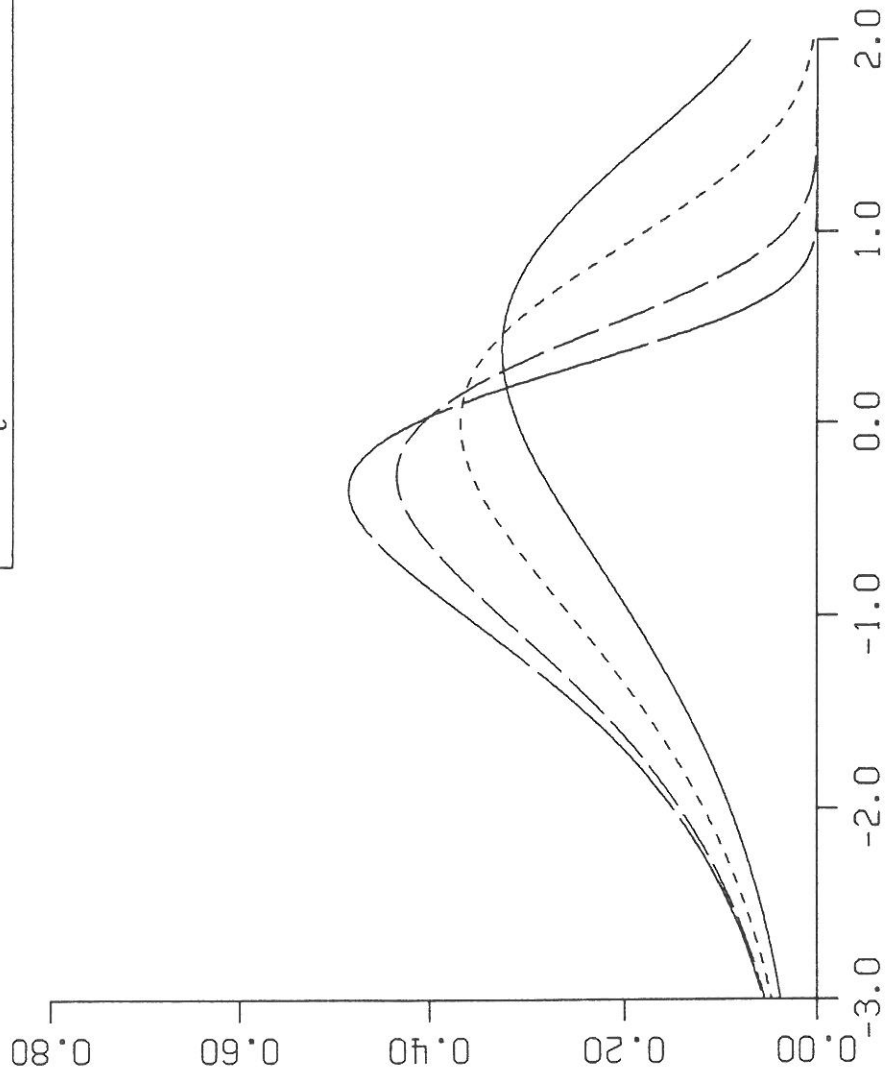
a=1.00
b=2.00
c=1.00

a=1.00
b=1.00
c=1.00

a=1.00
b=0.50
c=1.00

DOPPELT EXPONENTIAL ALLGEMEIN

$$c \frac{b^{\frac{a+1}{c}}}{\Gamma(\frac{a+1}{c})} e^{(a+1)x} e^{-bx^c} \quad -\infty < x < \infty$$



a=1.00
b=1.00
c=2.00

a=1.00
b=1.00
c=1.50

a=1.00
b=1.00
c=1.00

a=1.00
b=1.00
c=0.75

Verteilung: **EXPONENTIAL** (Fuller)

Parameter: $a > 0$

Dichtefunktion: $a e^{-a x} \quad x \geq 0$

Verteilungsfunktion: $1 - e^{-a x} \quad x \geq 0$

Erwartungswert: $\frac{1}{a}$

Modus: 0

Median: $\frac{1}{a} \ln 2$

Varianz: $\frac{1}{a^2}$

Schiefte: 2

Exzeß: 6

Bemerkungen zur EXPONENTIAL-Verteilung:

Mit FULLER bezeichnet man oft die verschobene Verteilung

$$f(x) = a e^{-a(x-x_0)} \quad x \geq x_0$$

⇐ *Gamma*: $a = 0$

⇐ *Frechet*: $c = 1$

⇒ *Frechet*: $x \Rightarrow x^c$

⇒ *Laplace*: zweiseitig durch $x \Rightarrow |x|$

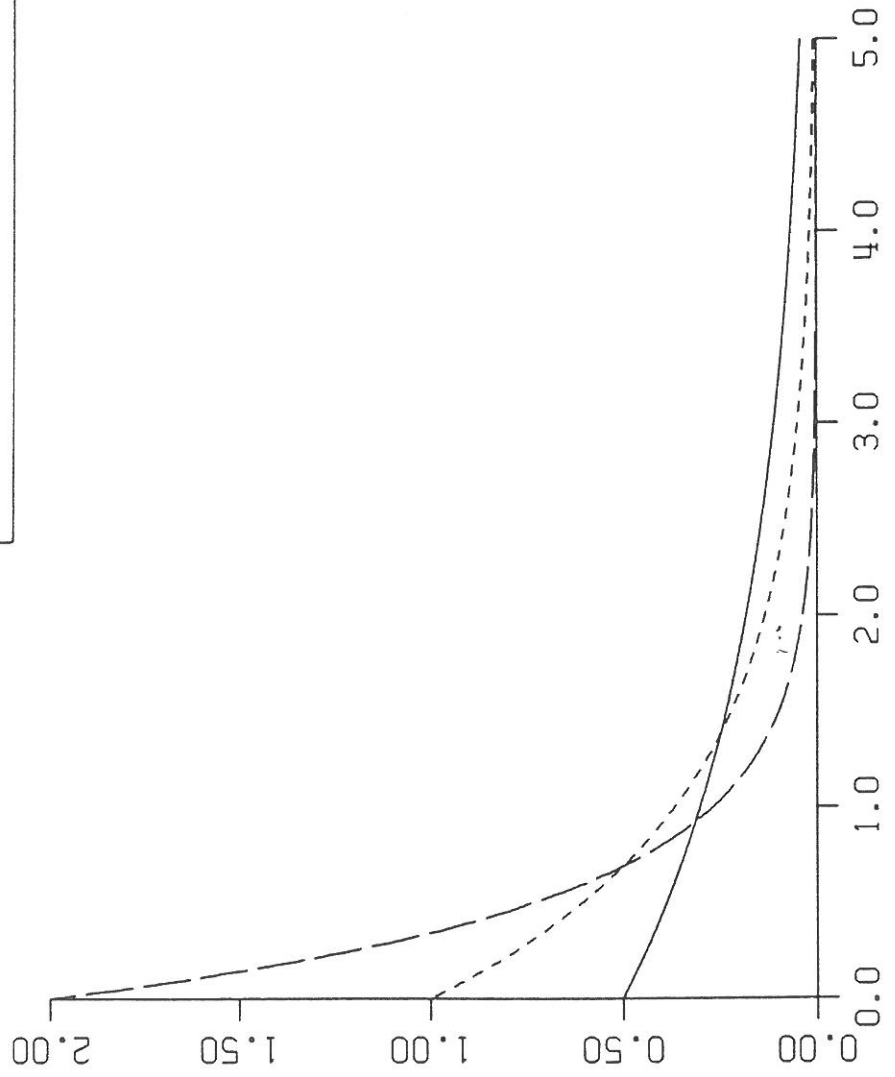
Gebäuchlich ist auch die Darstellung

$$a \Rightarrow \frac{1}{b}$$

$$f(x) = \frac{1}{b} e^{-\frac{x}{b}}$$

EXPONENTIAL (Fuller)

$$a e^{-ax} \quad x \geq 0$$



a=2.00

a=1.00

a=0.50

Verteilung: F (Fischer)

Parameter: $m, n \in \mathbb{N}$ (Freiheitsgrade)

Dichtefunktion:
$$\frac{\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{2}}}{B\left(\frac{m}{2}, \frac{n}{2}\right)} x^{\frac{m}{2}-1} \left(1 + \frac{m}{n} x\right)^{-\frac{m+n}{2}} \quad x > 0$$

Verteilungsfunktion:
$$\int_0^x f(t) dt$$

Erwartungswert: $\frac{2}{n-2}$ für $n > 2$

Modus: $\frac{n(m-2)}{m(n+2)}$ für $m > 1$

Varianz: $\frac{2n^2(m+n-2)}{m(n-2)^2(n-4)}$ für $n > 4$

Schiefe: $\frac{2m+n-2}{n-6} \sqrt{\frac{8(n-4)}{m+n-2}}$ für $n > 6$

Exzeß:
$$\frac{12(n-2)^2(n-4) + m(m+n-2)(5n-22)}{m(n-6)(n-8)(m+n-2)}$$

für $n > 8$

Bemerkungen zur F-Verteilung:

$$\Leftarrow \text{Beta (1. Art): } p = \frac{m}{2}, q = \frac{n}{2}, x \Rightarrow \frac{x}{\frac{n}{m} + x}$$

$$\Leftarrow \text{Beta (2. Art): } p = \frac{m}{2}, q = \frac{n}{2}, x \Rightarrow \frac{m}{n} x$$

$$\Rightarrow t : m = 1, n = n, x \Rightarrow x^2$$

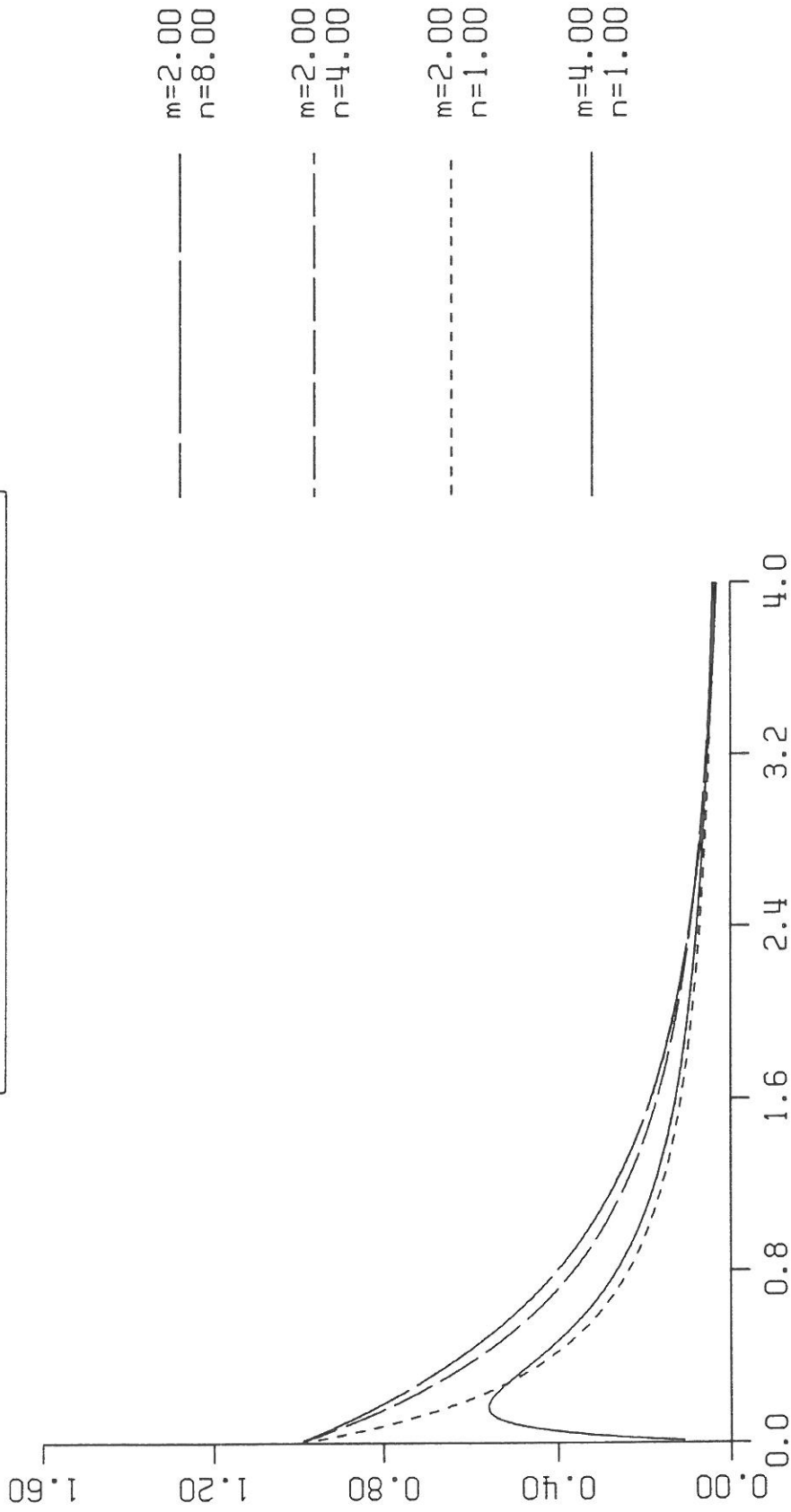
$$\Rightarrow \text{Chi-Quadrat: } m = ny, n \Rightarrow \infty, x \Rightarrow \frac{x}{m}$$

Die F-Verteilung wird in der Schätz- und Testtheorie angewendet.

Zur Betafunktion B s. Abschnitt 4, Einleitung

$$F \text{ (Fischer)}$$

$$\frac{\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{2}}}{B\left(\frac{m}{2}, \frac{n}{2}\right)} x^{\frac{m}{2}-1} \left(1 + \frac{m}{n}x\right)^{-\frac{m+n}{2}} \quad x > 0$$



Verteilung: **FRECHET** (Extremal II, Weibull, Extremal III, Goodrich A)

Parameter: $b > 0, c > 1$

Dichtefunktion: $b c x^{c-1} e^{-b x^c} \quad x > 0$

Verteilungsfunktion: $1 - e^{-b x^c}$

Erwartungswert: $\frac{C1}{b^{1/c}}$

Modus: $\left(\frac{c-1}{b c}\right)^{1/c}$

Median: $\left(\frac{\ln 2}{b}\right)^{1/c}$

Varianz: $\frac{1}{b^{2/c}} (C2 - C1^2)$

Schiefe: $\frac{C3 - 3 C2 C1 + 2 C1^3}{(C2 - C1^2)^{3/2}}$

$$C1 = \Gamma\left(\frac{1}{c} + 1\right) \quad C2 = \Gamma\left(\frac{2}{c} + 1\right) \quad C3 = \Gamma\left(\frac{3}{c} + 1\right)$$

Bemerkungen zur FRECHET-Verteilung:

← *Hypergamma*: $a = c - 1$

← *Gumbel*: $x \Rightarrow \ln x$

→ *Gumbel*: $x \Rightarrow e^x$

→ *Exponential*: $c = 1, a = b$

→ *Rayleigh*: $c = 2, b = \frac{1}{\lambda}$

Zur Gammafunktion Γ s. Abschnitt 4, Einleitung.

Man nennt die Frechetverteilung mit $x \Rightarrow x - x_0$ auch Weibullverteilung (Extremal 3). Auch die Goodrich A-Verteilung ist identisch mit der Frechetverteilung. Dabei ist jedoch auf die unterschiedlichen Schreibweisen zu achten. Häufig schreibt man die Frechetverteilung

$$\frac{c}{b^c} x^{c-1} e^{-\left(\frac{x}{b}\right)^c}$$

und die Goodrichverteilung

$$a c x^{c-1} e^{-a x^c}$$

Die durch zwei Parameter bedingte gute Anpassungsfähigkeit und die einfache Analytik (bekannte Kenngrößen und Verteilungsfunktion) sind Anlaß für ihre häufige Anwendung in der Hydrologie. Allerdings muß die besondere Empfindlichkeit der Frechetverteilung für kleine Änderungen der Parameter beachtet werden (Abb. 4.1). Da $C_s < 0$ für $c > 3,603\dots$ (numerisch ermittelt) und da zumindest in der Hydrologie überwiegend rechtsschiefe Häufigkeiten ($C_s > 0$) vorliegen, verbleibt für c das Intervall $1 < c < 3,603$. Mit $c \rightarrow 1$ strebt C_s gegen 2.

Auch der Einfluß des Parameters b wird aus Abb. 4.1 deutlich: Der Modus D nimmt mit wachsendem b ab, er strebt unabhängig von b mit wachsendem c gegen den Grenzwert 1:

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \left(\frac{c-1}{b c} \right)^{1/c} = 1$$

Eine Bevorzugung der Weibullverteilung zur Berechnung der Niedrigwasserwahrscheinlichkeit ergibt sich aus analytischer Sicht nicht. Möglicherweise aus historischer. Bei Bedarf kann nach obiger Parameterspezifikation E aus der Hypergammaverteilung berechnet werden.

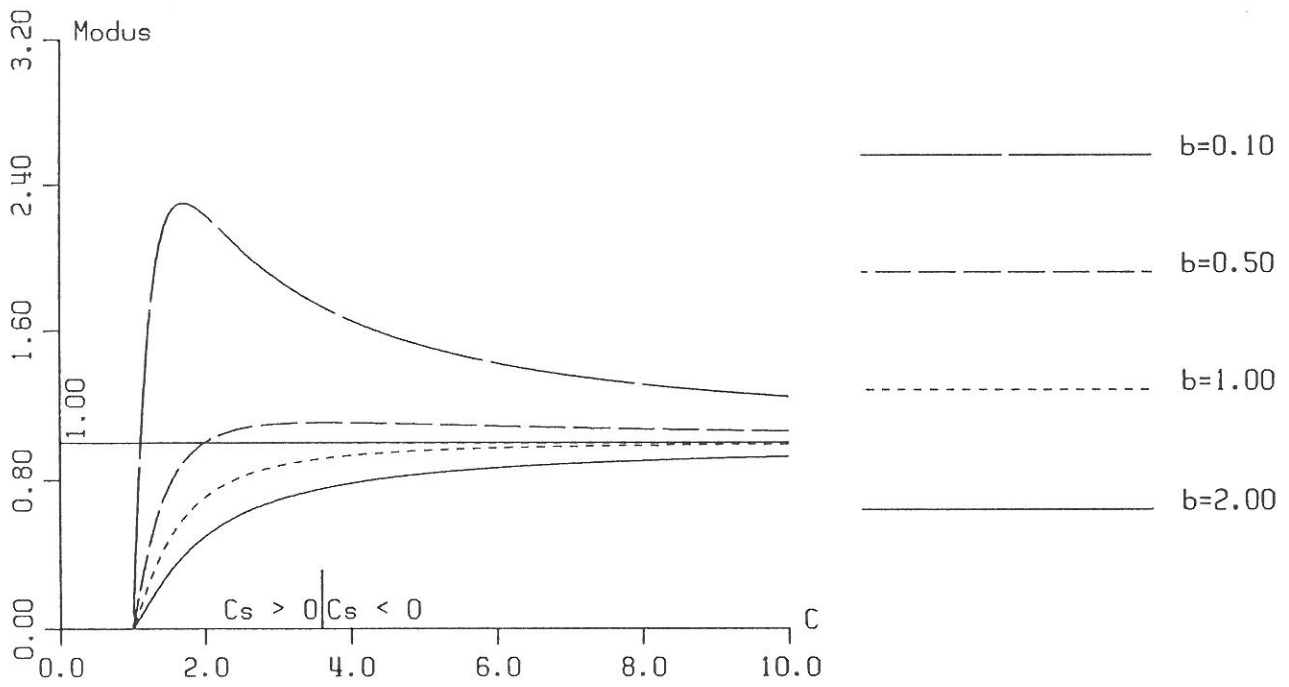
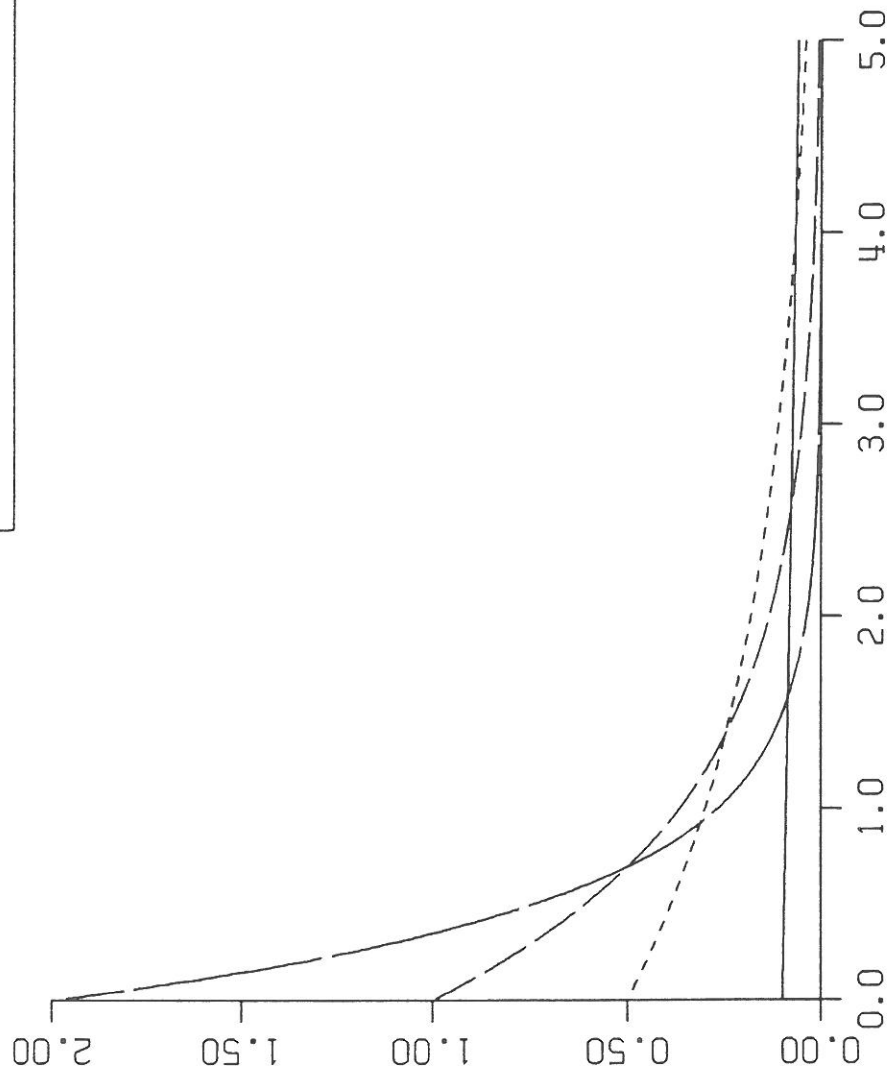


Abb. 4.1 Lage des Modus der Frechetverteilung

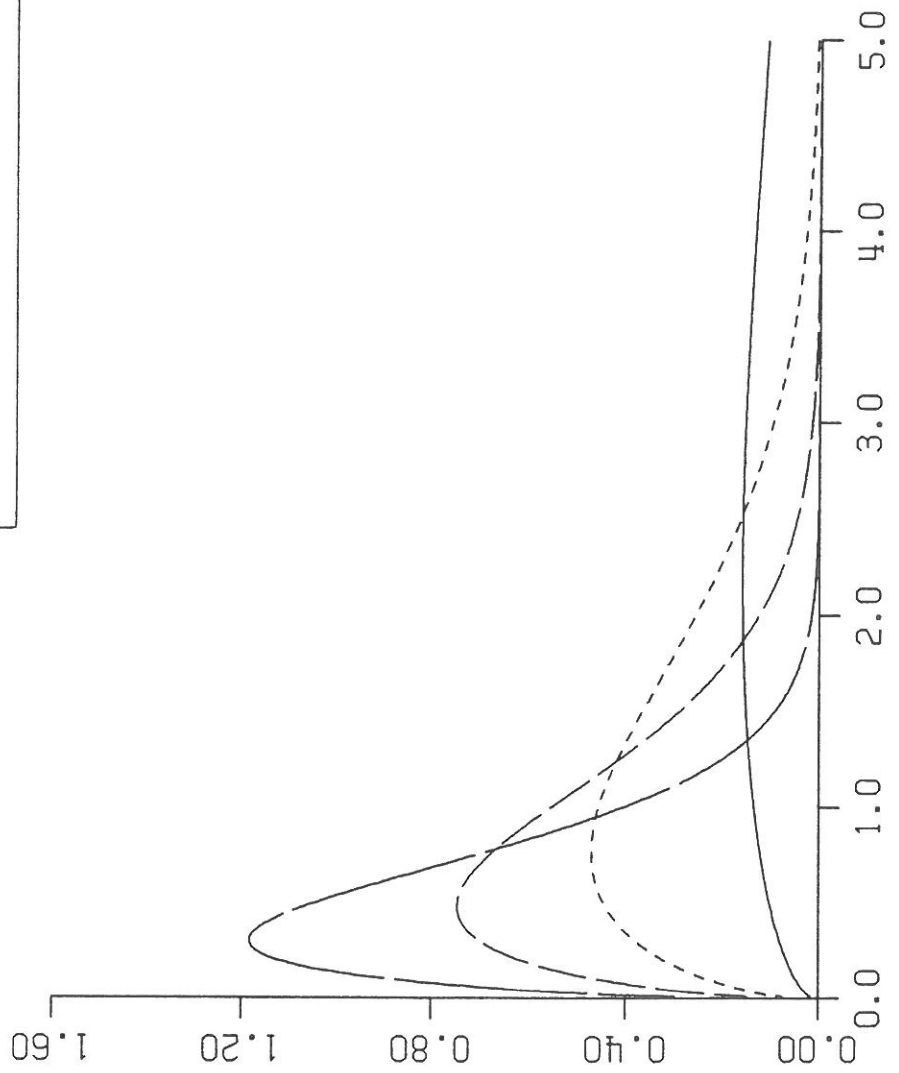
FRECHET (Extremal II,
Weibull, Extremal III, Goodrich A)

$$b c x^{c-1} e^{-b x^c} \quad x > 0$$



FRECHET (Extremal II,
Weibull, Extremal III, Goodrich A)

$$b c x^{c-1} e^{-b x^c} \quad x > 0$$



—————
b=2.00
c=1.50

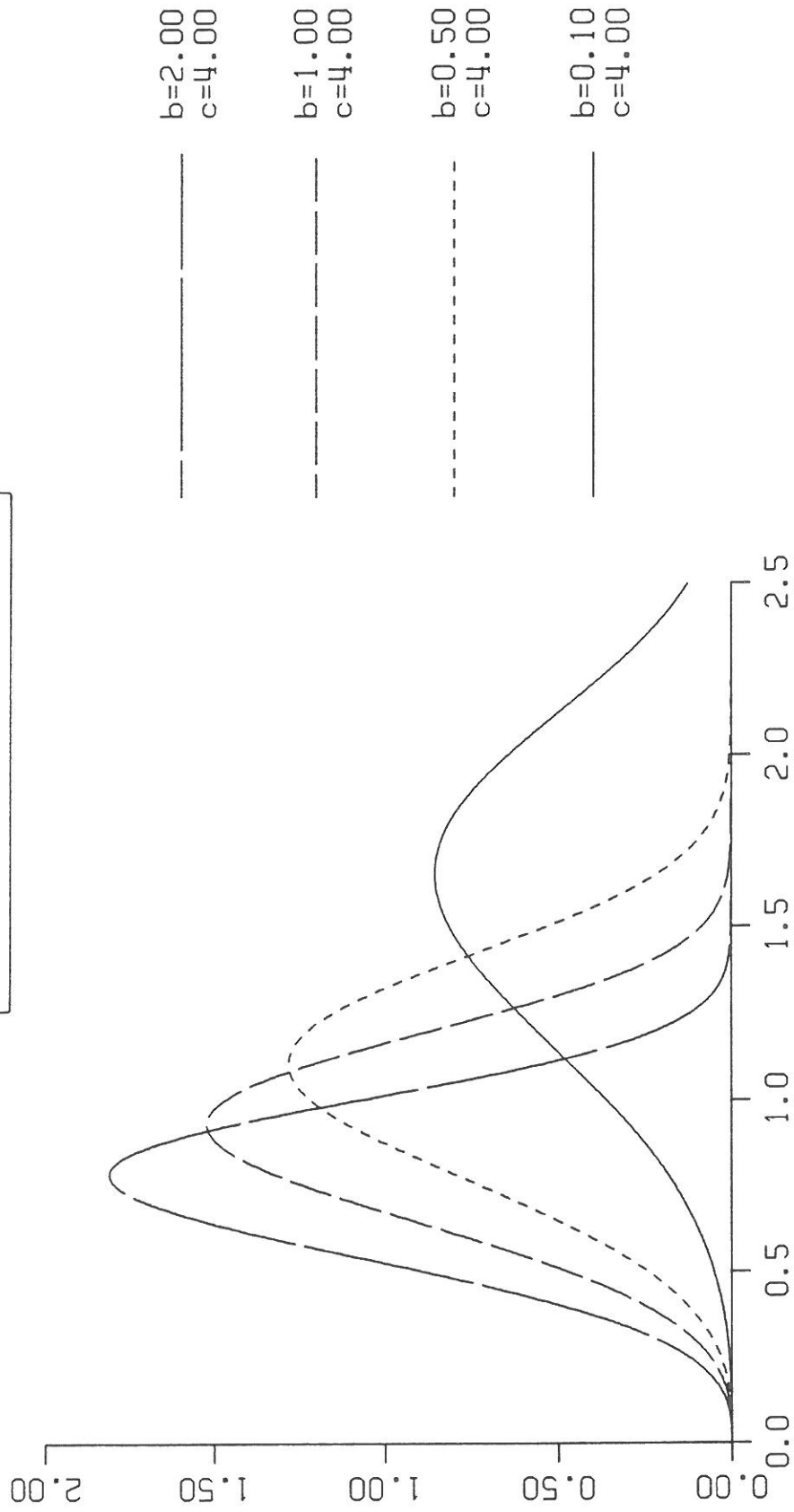
- - - - -
b=1.00
c=1.50

.....
b=0.50
c=1.50

—————
b=0.10
c=1.50

FRECHET (Extremal II,
Weibull, Extremal III, Goodrich A)

$$b c x^{c-1} e^{-b x^c} \quad x > 0$$



Verteilung: **FRECHET EXPONENTIAL**

Parameter: $b, c > 0$

Dichtefunktion: $b c e^{c x - b e^{c x}} \quad -\infty < x < \infty$

Verteilungsfunktion: $\int_{-\infty}^x f(t) dt$

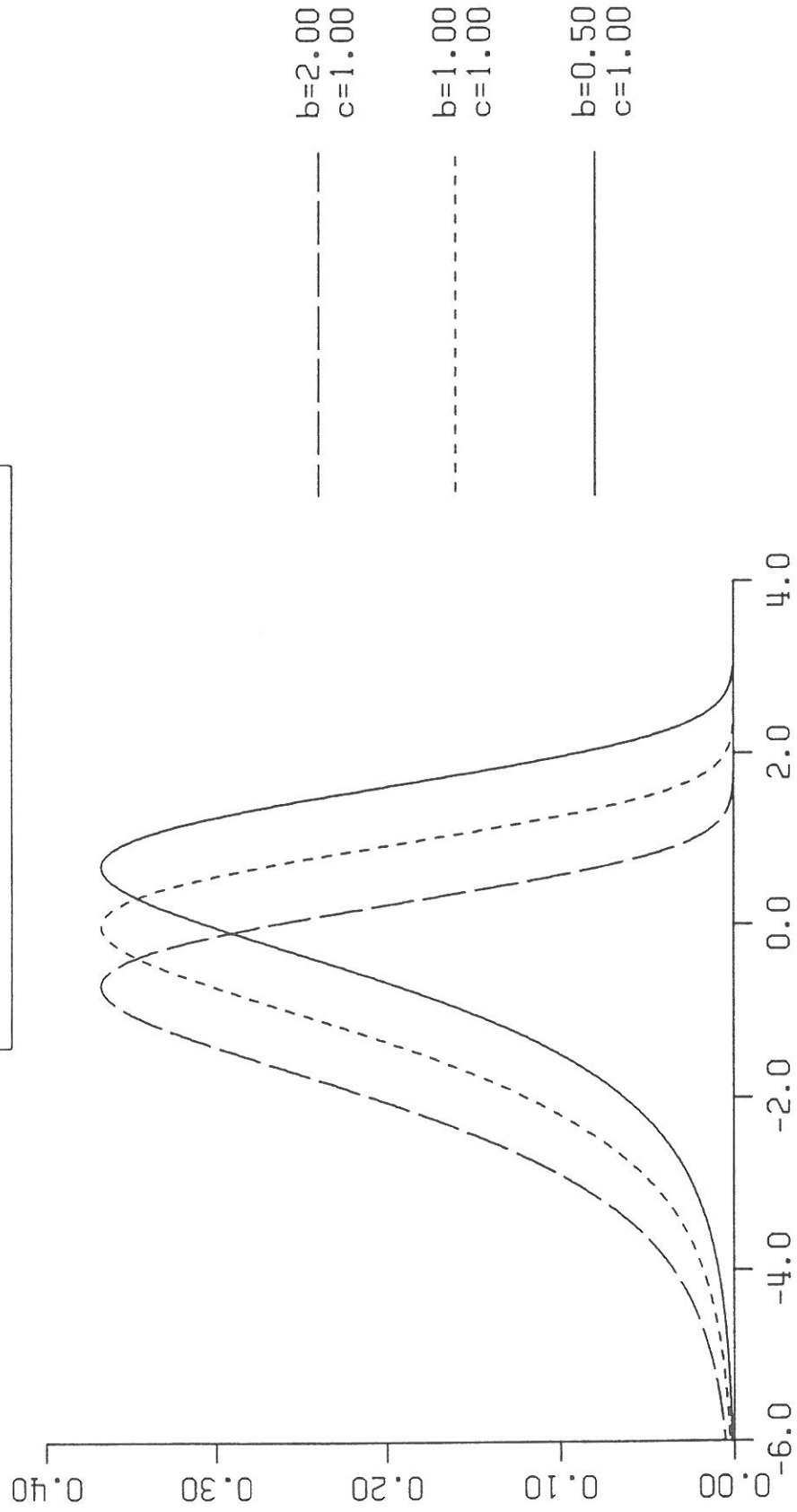
Modus: $-\frac{1}{c} \ln(b c)$

Bemerkungen zur FRECHET-EXPONENTIAL-Verteilung:

→ Gumbel: $b = 1$

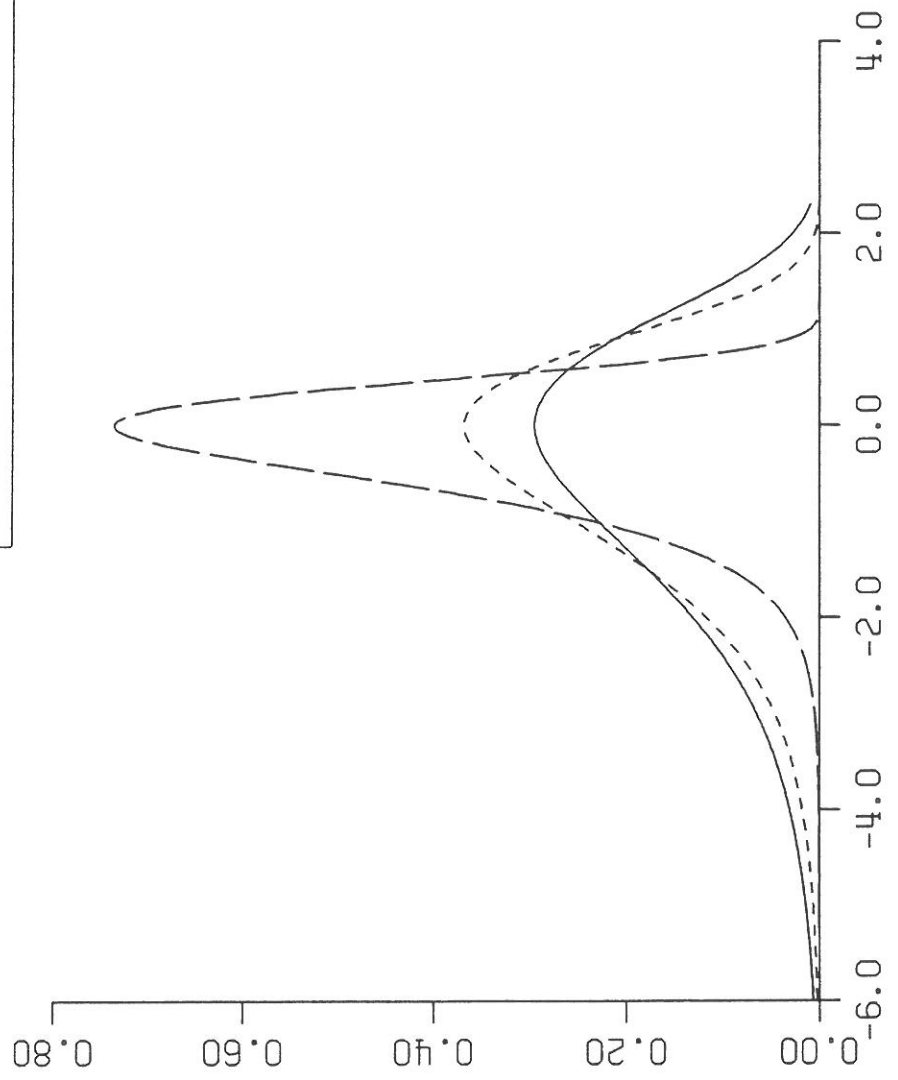
FRECHET EXPONENTIAL

$$b c e^{c x} - b e^{c x} \quad -\infty < x < \infty$$



FRECHET EXPONENTIAL

$$b c e^{c x} - b e^{c x} \quad -\infty < x < \infty$$



Verteilung: **GAMMA** (Pearson III)

Parameter: $a, b > 0$

Dichtefunktion: $\frac{b^{a+1}}{\Gamma(a+1)} x^a e^{-bx} \quad x \geq 0$

Verteilungsfunktion: $\int_0^x f(t) dt$

Erwartungswert: $\frac{a+1}{b}$

Modus: $\frac{a}{b}$

Varianz: $\frac{a+1}{b^2}$

Schiefe: $\frac{2}{\sqrt{a+1}}$

Exzeß: $\frac{6}{a+1}$

Bemerkungen zur GAMMA-Verteilung:

Mit Pearson III bezeichnet man oft die verschobene Gammaverteilung

$$f(x) = \frac{b^{a+1}}{\Gamma(a+1)} (x-x_0)^a e^{-b(x-x_0)} \quad x \geq x_0$$

⇐ *Hypergamma*: $c = 1$

⇒ *Exponential*: $a = 0$

⇒ *X-Quadrat*: $a = \frac{ny-2}{2}$, $b = \frac{1}{2}$

⇒ *Fosterverteilung*: $a = 2$,
auf diese Variante, die in der älteren amerikanischen Literatur gelegentlich auftaucht, wird hier nicht eingegangen.

Durch Logarithmieren ($x \Rightarrow \ln x$ unter Berücksichtigung von Abschnitt 3.4.2, c) entsteht aus der Gammaverteilung die logarithmische Gammaverteilung:

$$f(x) = \frac{b^{a+1}}{\Gamma(a+1)} (\ln x) e^{-b-1} \quad x \geq 1$$

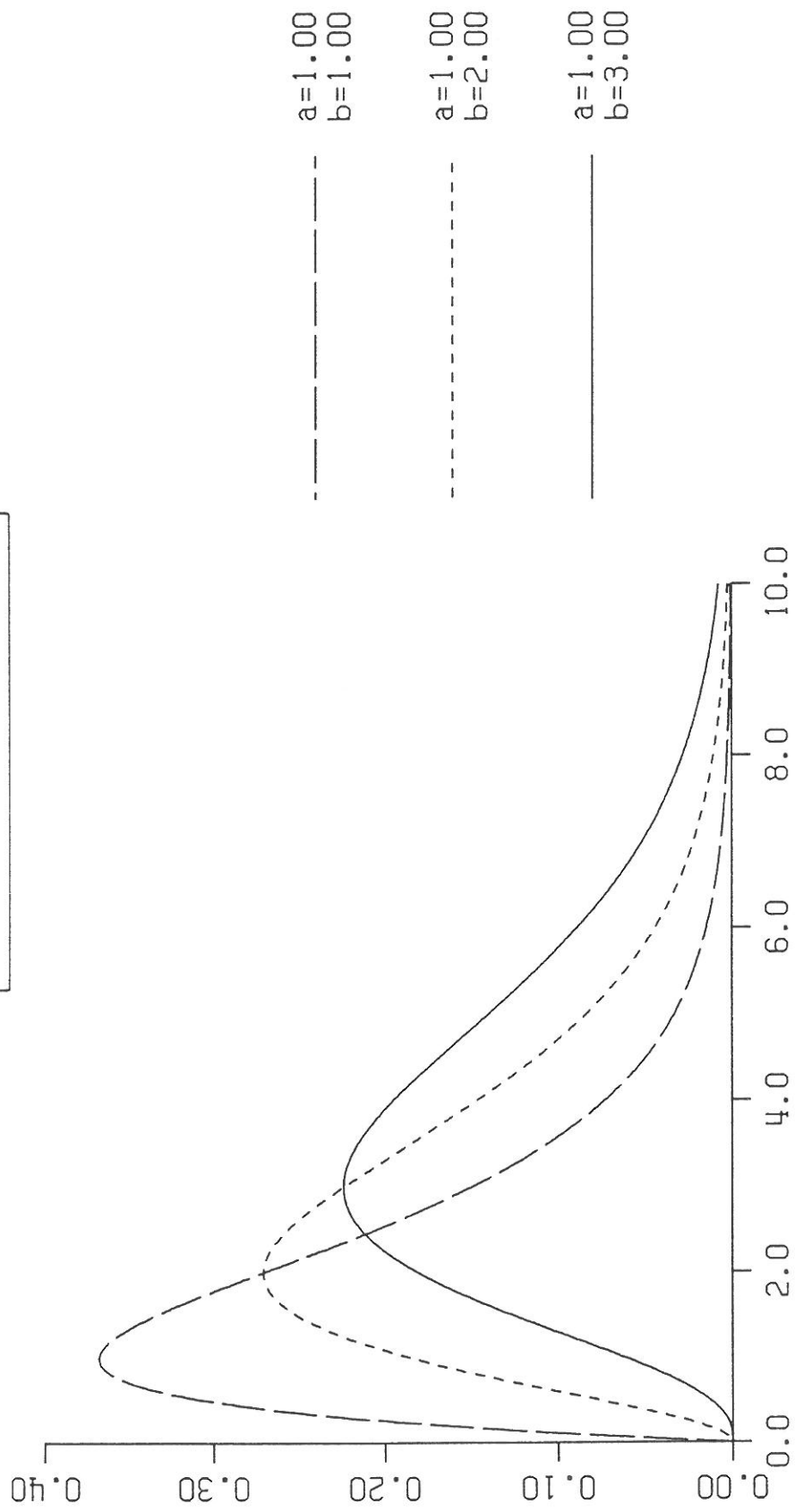
Sie ist eine Sonderform der logarithmischen Hypergammaverteilung.

Die Gammaverteilung findet in Mathematik, Naturwissenschaften und Technik vielfache Anwendungen. Ebenso in der Hydrologie.

Zur Gammafunktion Γ s. Abschnitt 4, Einleitung.

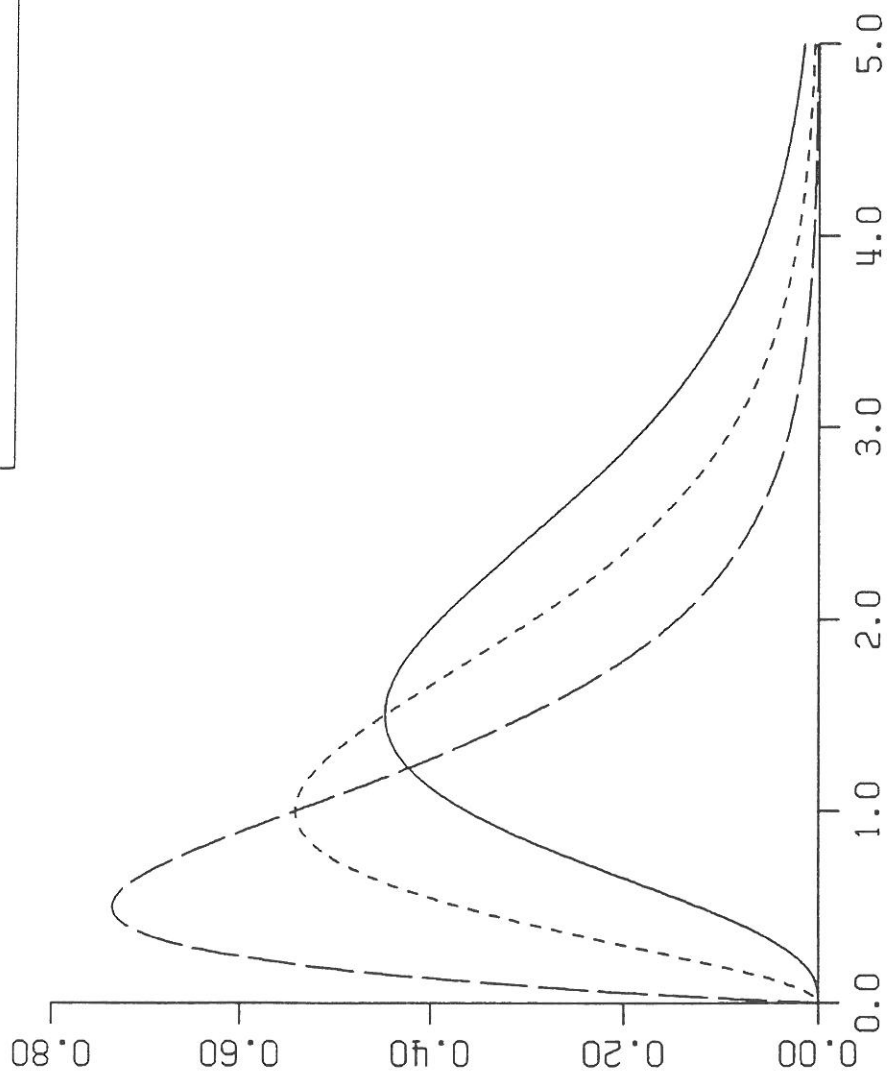
GAMMA (Pearson III)

$$\frac{b^{a+1}}{\Gamma(a+1)} x^a e^{-bx} \quad x \geq 0$$



GAMMA (Pearson III)

$$\frac{b^{a+1}}{\Gamma(a+1)} x^a e^{-bx} \quad x \geq 0$$



Verteilung:	GUMBEL (Extremal I)
Parameter:	$a > 0$
Dichtefunktion:	$a e^{-a x - e^{-a x}} \quad -\infty < x < \infty$
Verteilungsfunktion:	$e^{-e^{-a x}}$
Erwartungswert:	$\frac{\gamma}{a} \quad \gamma = 0,57721\dots: \text{Eulerkonstante}$
Modus:	0
Median:	$-\frac{\ln(\ln 2)}{a}$
Varianz:	$\frac{\pi^2}{6 a^2}$
Schiefe:	$const. = 1,139\dots$
Exzeß:	$const. = 2,4\dots$

Bemerkungen zur GUMBEL-Verteilung:

⇐ Frechet: $x \Rightarrow e^x$, (Abschnitt 3.4.2, f)

⇒ Frechet: $x \Rightarrow \ln x$, (Abschnitt 3.4.2, c)

Die Gumbelverteilung (auch EXTREMAL I-Verteilung genannt) wird in der Hydrologie häufig angewandt (einfache Analytik, bekannte Verteilungsfunktion, nur ein einziger Parameter). Die zwangsweise mangelhafte Anpassungsfähigkeit und die Zuweisung von Häufigkeiten/Wahrscheinlichkeiten auch für negative Argumente mahnen jedoch zur Vorsicht.

Das Produkt zweier Gumbelverteilungen wurde als ROSSI-Verteilung oder MISCHVERTEILUNG nach ROSSI bekannt:

$$f(x) = ae^{-ax} e^{-e^{-ax}} + be^{-bx} e^{-e^{-bx}}$$

$$F(x) = e^{-e^{-ax}} e^{-e^{-bx}}$$

In dieser Form sind $f(x)$ und $F(x)$ jedoch nicht normiert. Fügner et al. [1990] bezeichnen

$$f(x) = \frac{a}{b} \left(1 - a \frac{x}{b}\right)^{-c} \frac{1}{a} e^{-\left(1 - a \frac{x}{b}\right)^{-\frac{c}{a}}}$$

und

$$F(x) = e^{-\left(1 - a \frac{x}{b}\right)^{-\frac{c}{a}}}$$

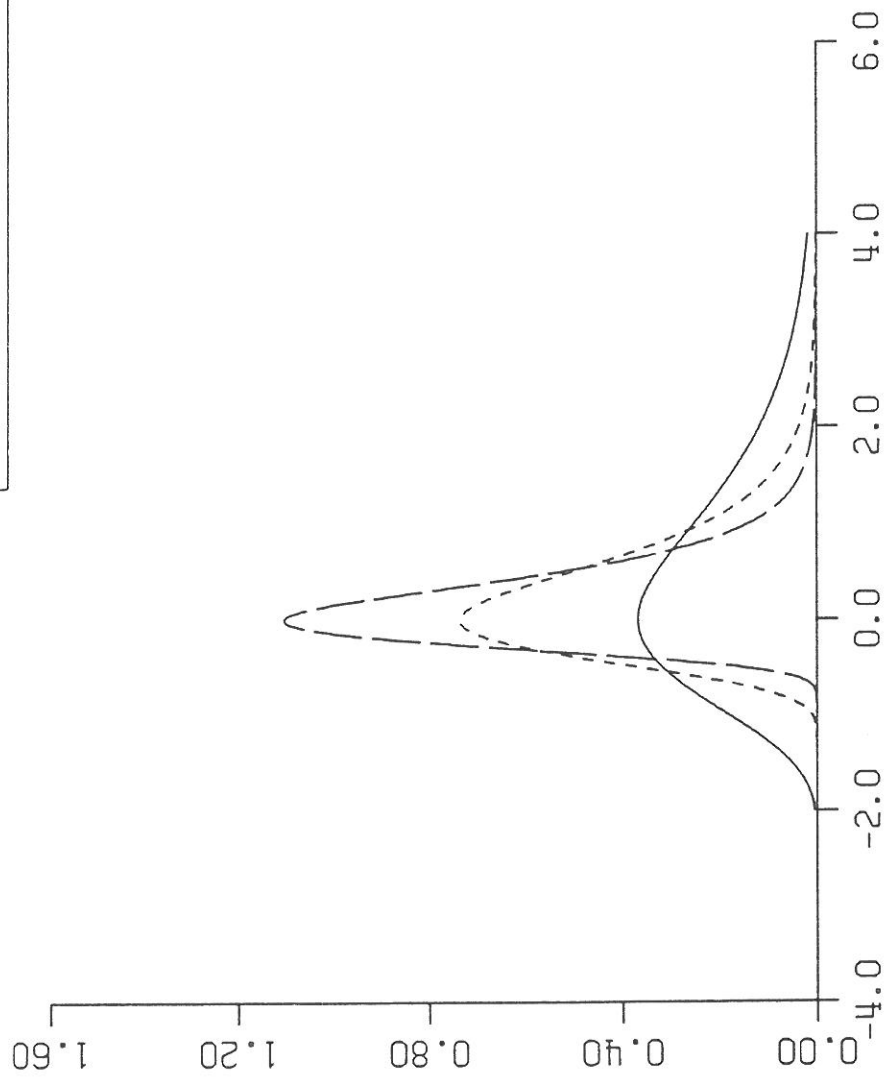
mit $a > -1$ ($a \neq 0$), $c, b > 0$

als ALLGEMEINE EXTREMWERTVERTEILUNG.

Es ist nach den o.g. Autoren $f(x)$ im Gumbelpapier für $a > 0$ nach unten gekrümmt und für $a < 0$ nach oben; die Gumbelverteilung erscheint definitionsgemäß als Gerade.

GUMBEL (Extremal I)

$$a e^{-a x} - e^{-a x} \quad -\infty < x < \infty$$



----- a=3.00

----- a=2.00

_____ a=1.00

Verteilung: **HYPERGAMMA** (Gamma Allgemein)

Parameter: $a, b, c > 0$

Dichtefunktion: $c \frac{b^{\frac{a+1}{c}}}{\Gamma\left(\frac{a+1}{c}\right)} x^a e^{-b x^c} \quad x > 0$

Verteilungsfunktion: $\int_0^x f(t) dt$

Erwartungswert: $\frac{1}{b^{\frac{1}{c}} A1} A2$

Modus: $\left(\frac{a}{b c}\right)^{\frac{1}{c}}$

Varianz: $\frac{1}{b^{\frac{2}{c}} A1} \left(A3 - \frac{A2^2}{A1} \right)$

Schiefe: $\frac{1}{b^{\frac{3}{c}} \sigma^3 A1} \left(A4 - 3 \frac{A2 A3}{A1} + \frac{A2^3}{A1^2} \right)$

Exzeß: $\frac{1}{b^{\frac{4}{c}} \sigma^4 A1} \left(A5 - 4 \frac{A2 A4}{A1} + 6 \frac{A2^2 A3}{A1^2} - 3 \frac{A2^4}{A1^3} \right) - 3$
Dabei ist $A1 = \Gamma\left(\frac{a+1}{c}\right), \dots, A5 = \Gamma\left(\frac{a+5}{c}\right)$

Bemerkungen zur HYPERGAMMA-Verteilung:

⇒ *Gamma*: $c = 1$

⇒ *Frechet*: $a = c - 1$

⇒ *Chi*, $a = n - 1$, $b = \frac{1}{2}$, $c = 2$,

⇒ *Rayleigh*: $a = 1$, $b = \frac{1}{\lambda}$, $c = 2$

⇒ *Maxwell*: $a = 2$, $b = \frac{1}{2a^2}$, $c = 2$

⇒ *Chi-Quadrat*: siehe *Gamma*

⇒ *Exponential*: siehe *Gamma*

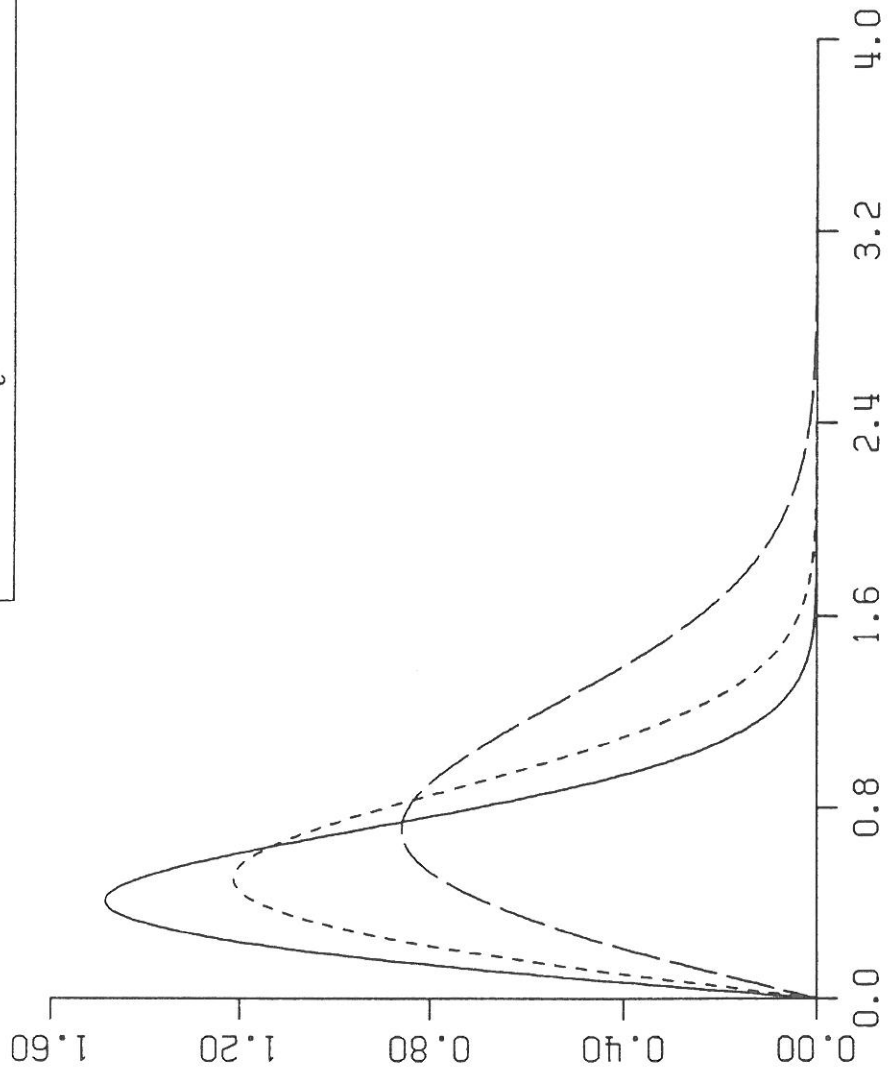
Die Hypergammaverteilung wird auch verallgemeinerte Gammaverteilung genannt. Sie wurde 1972 von Mendel zur Anwendung in der Hydrologie vorgestellt. Wegen ihrer 3 Parameter weist sie eine große Anpassungsfähigkeit auf. Da sich die Verteilungsfunktion nicht geschlossen analytisch angeben läßt, müssen numerische Näherungsverfahren angewandt werden (Abschnitt 6).

Durch Logarithmieren ($x \Rightarrow \ln x$ unter Berücksichtigung von Abschnitt 3.4.2, c) entsteht aus der Hypergammaverteilung die logarithmische Hypergammaverteilung (s. dort).

Zur Gammafunktion Γ s. Abschnitt 4, Einleitung.

HYPERGAMMA (Gamma Allgemein)

$$c \frac{b^{\frac{a+1}{c}}}{\Gamma(\frac{a+1}{c})} x^a e^{-bx^c} \quad x > 0$$



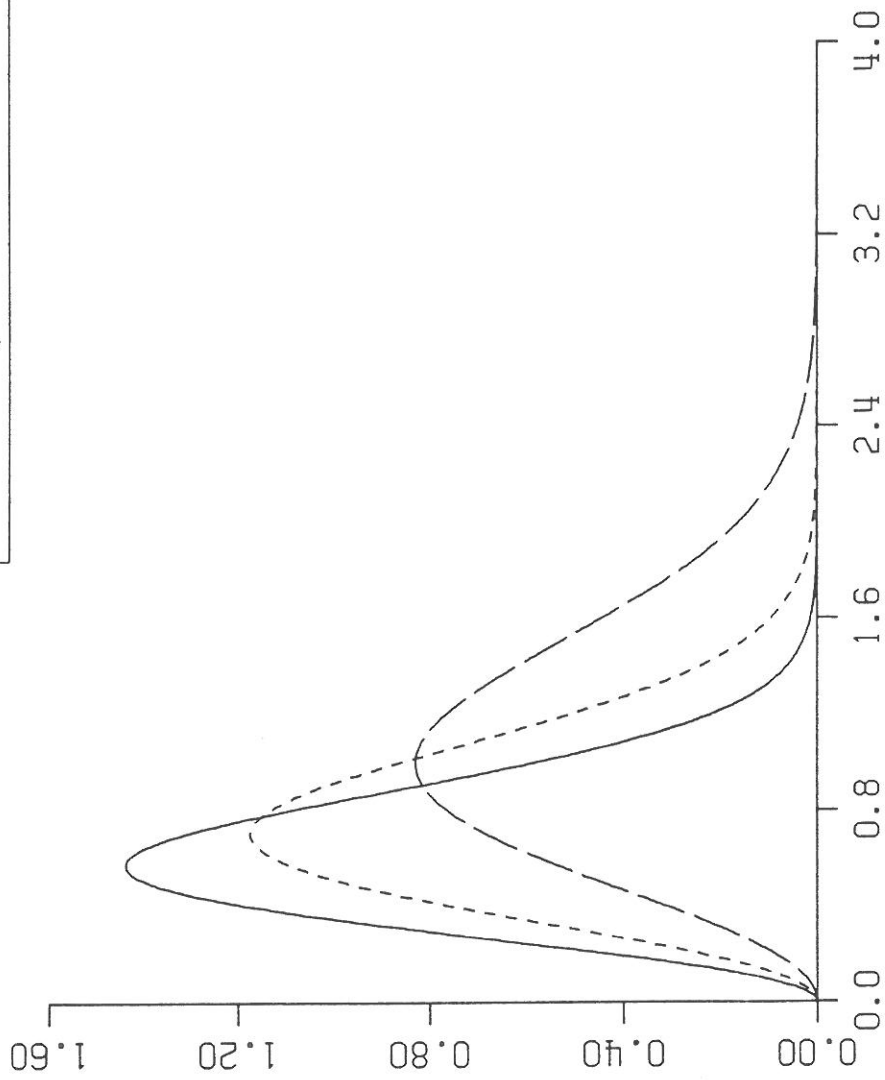
a=1.00
b=1.00
c=2.00

- · -
a=1.00
b=2.00
c=2.00

—
a=1.00
b=3.00
c=2.00

HYPERGAMMA (Gamma Allgemein)

$$c \frac{b^c}{\Gamma(\frac{a+1}{c})} x^a e^{-bx^c} \quad x > 0$$



 a=2.00
 b=1.00
 c=2.00

 a=2.00
 b=2.00
 c=2.00

 a=2.00
 b=3.00
 c=2.00

Verteilung:	LAPLACE
Parameter:	$a > 0$
Dichtefunktion:	$\frac{a}{2} e^{-a x } \quad -\infty < x < \infty$
Verteilungsfunktion:	$\frac{1}{2} e^{ax} \quad \text{für } x \leq 0$ $1 - \frac{1}{2} e^{-ax} \quad \text{für } x > 0$
Erwartungswert:	0
Modus:	0
Median:	0
Varianz:	$\frac{2}{a^2}$
Schiefe:	0
Exzeß:	3

Bemerkungen zur LAPLACE-Verteilung:

← *Exponential*: $x \Rightarrow |x|$

Der Faktor $\frac{1}{2}$ gegenüber der Exponentialverteilung entsteht wegen der Ausdehnung des Definitionsbereichs auf das gesamte reelle Intervall.

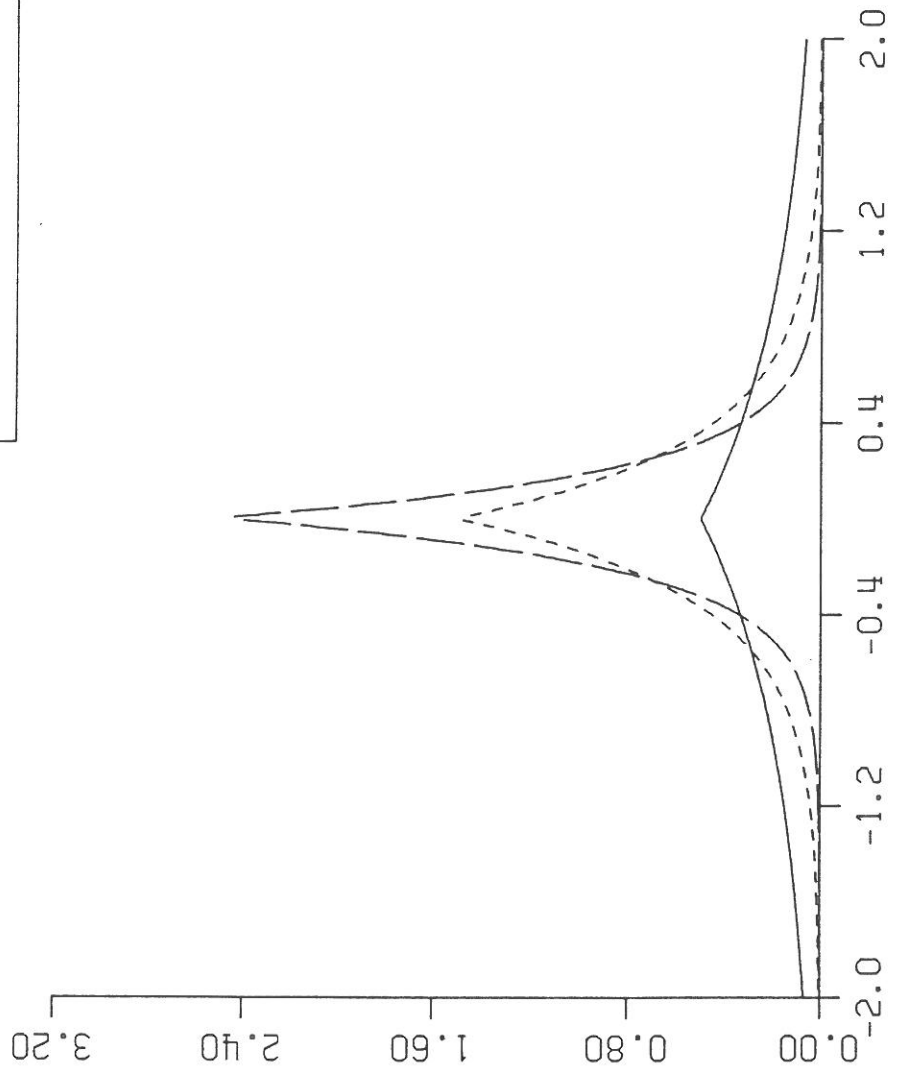
Auch die Darstellung mit $a \Rightarrow \frac{1}{b}$ (vergl. Exponential)

$$f(x) = \frac{1}{2b} e^{-\frac{|x|}{b}}$$

ist üblich.

LAPLACE

$$\frac{a}{2} e^{-a|x|} \quad -\infty < x < \infty$$



----- a=5.00

----- a=3.00

_____ a=1.00

Verteilung: **LOGHYPERGAMMA**

Parameter: $a, b, c > 0$

Dichtefunktion:
$$c \frac{b^{\frac{a+1}{c}}}{\Gamma\left(\frac{a+1}{c}\right)} \frac{1}{x} (\ln x)^a e^{-b(\ln x)^c} \quad x \geq 1$$

Verteilungsfunktion:
$$\int_0^x f(t) dt$$

Bemerkungen zur LOGHYPERGAMMA- und LOGGAMMA-Verteilung:

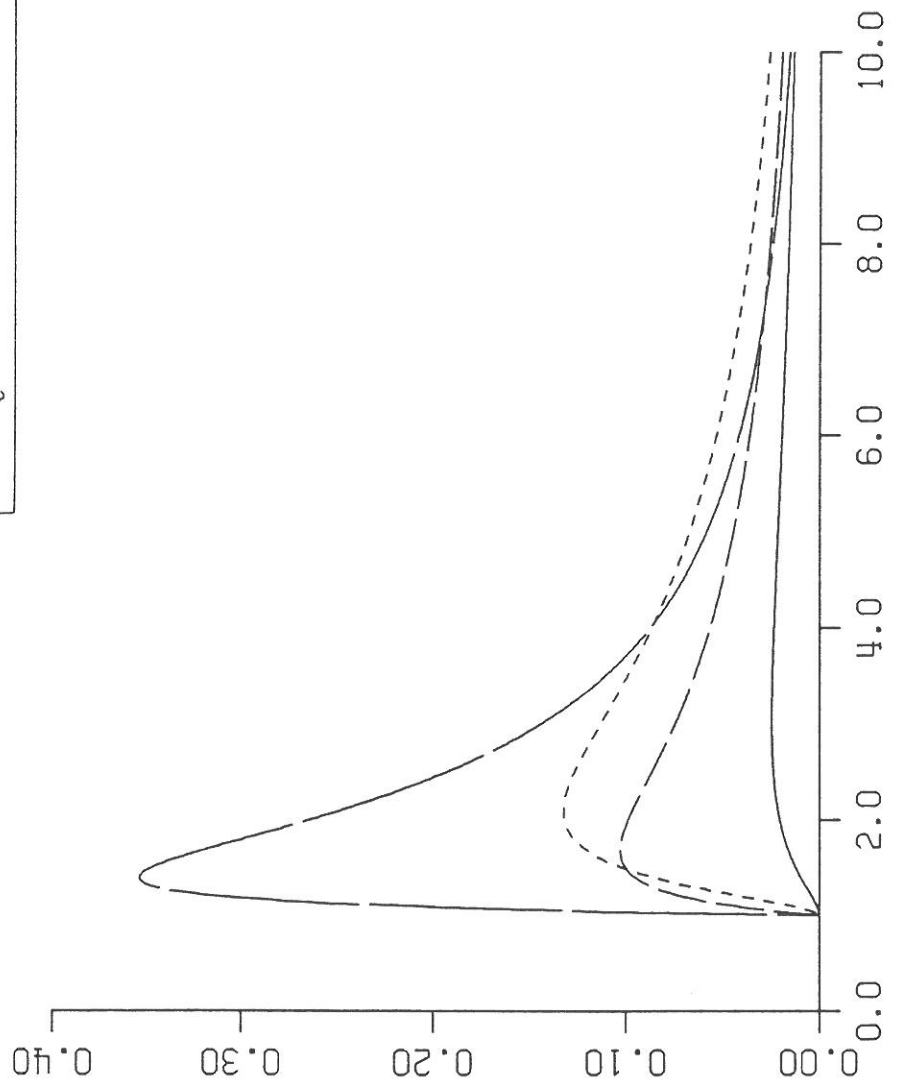
Beide Verteilungen sind vermutlich analytisch in der Literatur nicht behandelt. Für $c = 1$ können jedoch die Kenngrößen berechnet werden unter Beachtung von (2.7) und

$$\int_1^{\infty} \ln^a x x^{-b-1} dx = \frac{\Gamma(a+1)}{b^{a+1}}$$

Zur Gammafunktion Γ s. Abschnitt 4, Einleitung.

LOGHYPERGAMMA

$$c \frac{b^c}{\Gamma(\frac{a+1}{c})} \frac{1}{x} (\ln x)^a e^{-b(\ln x)^c} \quad x \geq 1$$



a=1.00
b=2.00
c=0.80

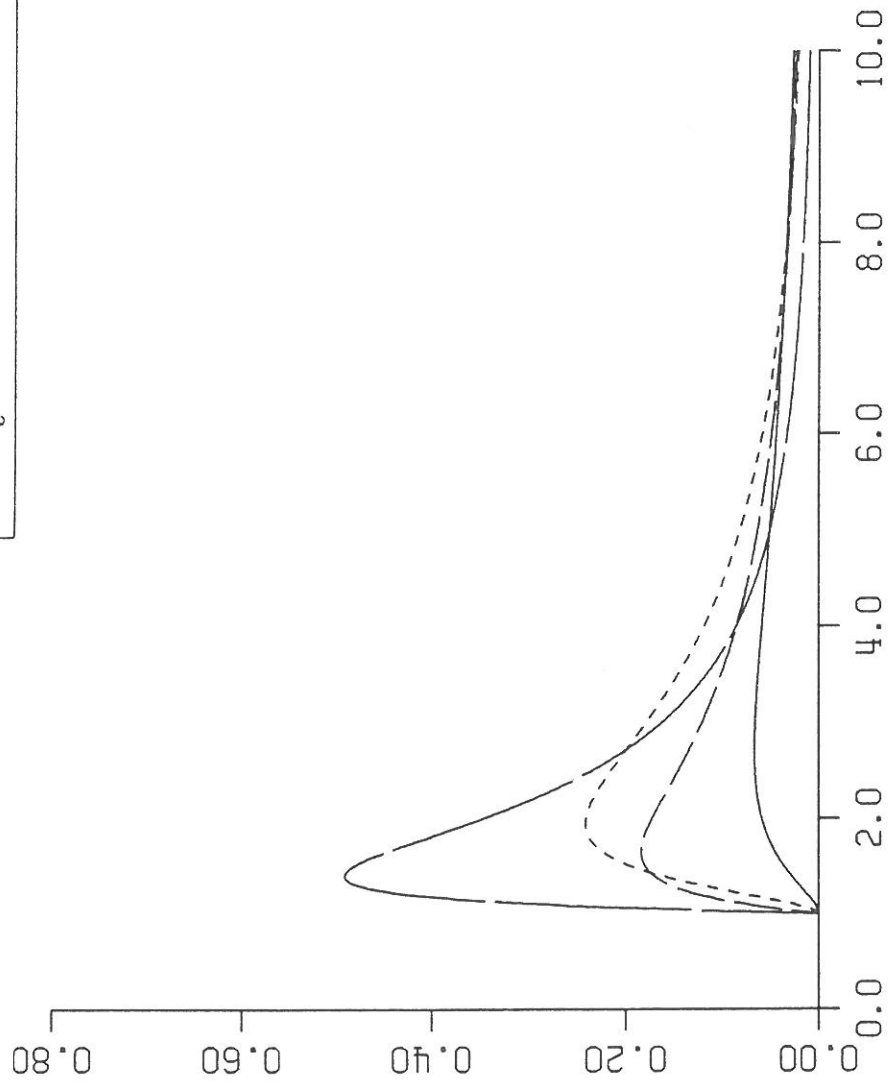
a=1.00
b=1.00
c=0.80

a=2.00
b=2.00
c=0.80

a=2.00
b=1.00
c=0.80

LOGHYPERGAMMA

$$c \frac{b}{c} \frac{1}{\Gamma(\frac{a+1}{c})} (\ln x)^a e^{-b(\ln x)^c} \quad x \geq 1$$



a=1.00
b=2.00
c=1.00

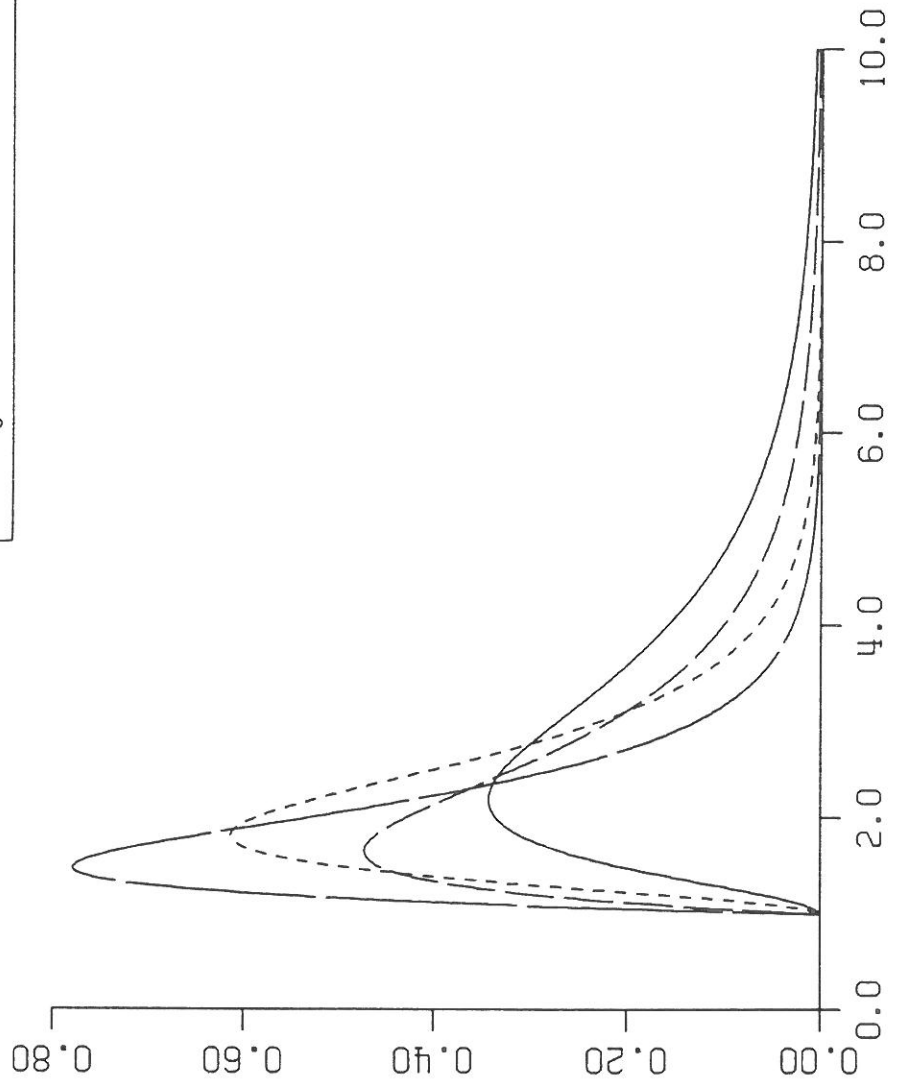
a=1.00
b=1.00
c=1.00

a=2.00
b=2.00
c=1.00

a=2.00
b=1.00
c=1.00

LOGHYPERGAMMA

$$c \frac{b^c}{\Gamma(\frac{a+1}{c})} \frac{1}{x} (\ln x)^a e^{-b(\ln x)^c} \quad x \geq 1$$



a=1.00
b=2.00
c=2.00

a=1.00
b=1.00
c=2.00

a=2.00
b=2.00
c=2.00

a=2.00
b=1.00
c=2.00

Verteilung: **LOGNORMAL** (Fechner)

Parameter: $b > 0$

Dichtefunktion: $\frac{1}{\sqrt{2\pi} b} \frac{1}{x} e^{-\frac{(\ln x - a)^2}{2 b^2}} \quad x > 0$

Verteilungsfunktion: $\int_0^x f(t) dt$

Erwartungswert: $e^{a + \frac{b^2}{2}}$

Modus: $e^{a - b^2}$

Median: e^a

Varianz: $e^{2a + b^2} (e^{b^2} - 1)$

Schiefe: $(e^{b^2} + 2) \sqrt{e^{b^2} - 1}$

Exzeß: $e^{4 b^2} + 2 e^{3 b^2} + 3 e^{2 b^2}$

Bemerkungen zur LOGNORMAL-Verteilung:

$$\Leftarrow \text{Normal: } x = \ln x$$

unter Beachtung von Abschnitt 3.4.2, c

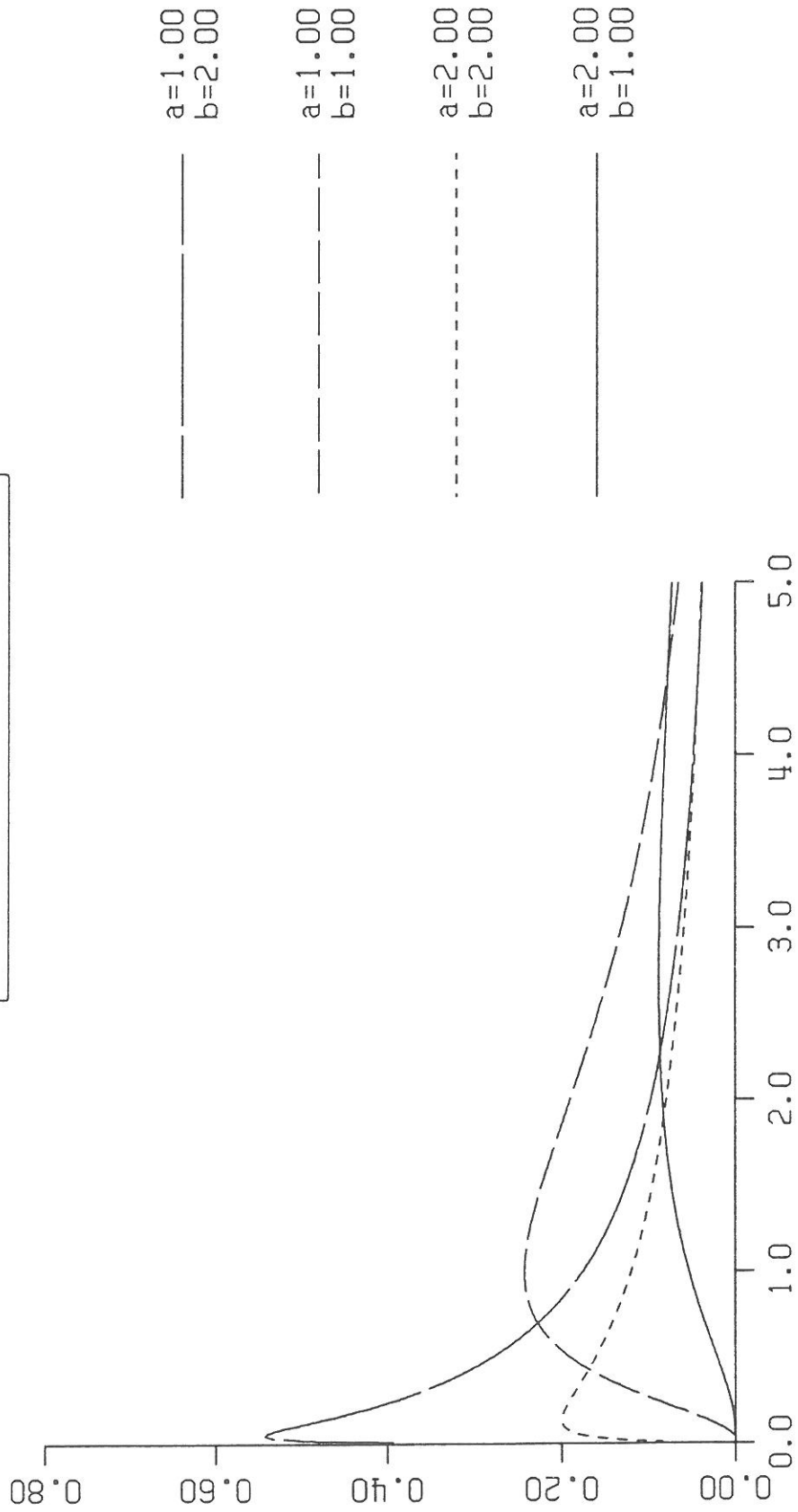
Andere Lognormalverteilungen sind die Galtonverteilung und die Gibratverteilung, die beide durch Logarithmieren aus der Normalverteilung abgeleitet werden:

$$\text{Galton: } \Leftarrow \text{Normal: } x = A \ln (x - C) + B$$

$$\text{Gibrat: } \Leftarrow \text{Normal: } x = \ln x + B$$

LOGNORMAL (Fechner)

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi} b} \frac{1}{x} e^{-\frac{(\ln x - a)^2}{2b^2}} \quad x > 0$$



Verteilung: **MAXWELL**

Parameter: $a > 0$

Dichtefunktion: $\frac{2}{a^3\sqrt{2}\pi} x^2 e^{-\frac{x^2}{2a^2}} \quad x > 0$

Verteilungsfunktion: $\int_0^x f(t) dt$

Erwartungswert: $\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} a \approx 1,5958 a$

Modus: $\sqrt{2} a \approx 1,4142 a$

Median: $\approx 1,5382 a$

Varianz: $\left(3 - \frac{8}{\pi}\right) a^2 \approx 0,4535 a^2$

Schiefe: $const. = 0,4856928... \approx 0,4857$

Exzeß: $const. = 0,1081638... \approx 0,1082$

Bemerkungen zur MAXWELL-Verteilung:

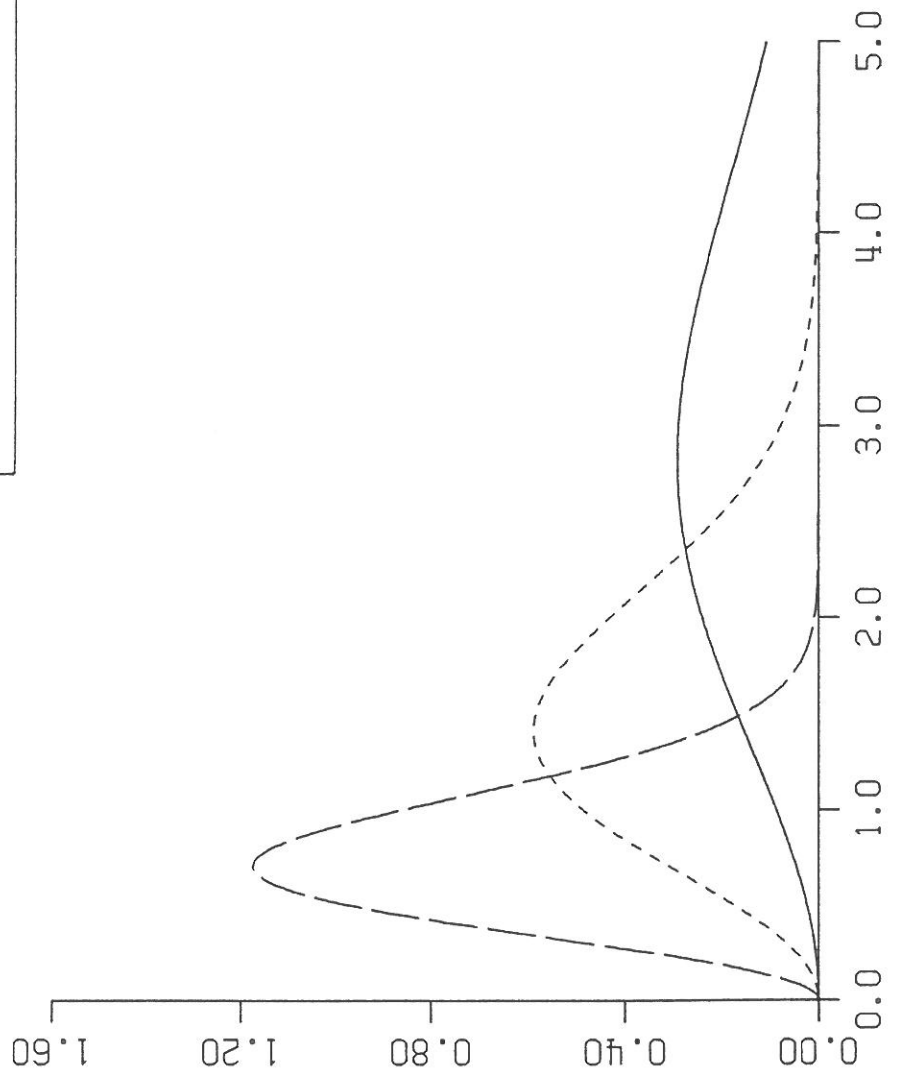
$$\leftarrow \text{Hypergamma: } a = 2, b = \frac{1}{2a^2}, c = 2$$

Den Median berechnet man numerisch. Die übrigen Kenngrößen folgen aus der Hypergammaverteilung mit der obigen Parameterspezifikation und den in Abschnitt 4, Einleitung angegebenen Werten für die Gammafunktion.

In der Physik wird die Maxwellverteilung, die die Verteilung der temperaturbedingten Geschwindigkeit von Gasmolekülen beschreibt, als Quasi-Naturgesetz betrachtet.

MAXWELL

$$\frac{2}{a^3\sqrt{2}\pi} x^2 e^{-\frac{x^2}{2a^2}} \quad x > 0$$



----- $a=0.50$

----- $a=1.00$

----- $a=2.00$

Verteilung: **NORMAL** (Gauss)

Parameter: $my, \sigma > 0$

Dichtefunktion: $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-my)^2}{2\sigma^2}} \quad -\infty < x < \infty$

Verteilungsfunktion: $\int_0^x f(t) dt$

Erwartungswert: my

Modus: my

Median: my

Varianz: σ^2

Schiefe: 0

Exzeß: 0

Bemerkungen zur NORMAL-Verteilung:

$$\Rightarrow \text{Standardnormal: } x = my + \sigma x$$

$$\Rightarrow \text{Lognormal: } x = \ln x$$

$$\Rightarrow \text{Galton: } x = A \ln(x-C) + B$$

$$\Rightarrow \text{Gibrat: } x = \ln x + B$$

$$\Leftarrow \text{Hypergamma: } a = 0, b = \frac{1}{2\sigma^2}, c = 2$$

Verwendung bei statistischen Auswertungen und der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Wegen ihres symmetrischen Aufbaus ($C_s = 0$) und der Zuweisung von Häufigkeiten/Wahrscheinlichkeiten auch für negative Argumente ist in der hydrologischen Extremwertstatistik Vorsicht geboten. Der Faktor 2 bei der Ableitung aus der Hypergammaverteilung entsteht durch die Ausdehnung auf diese negativen Argumente.

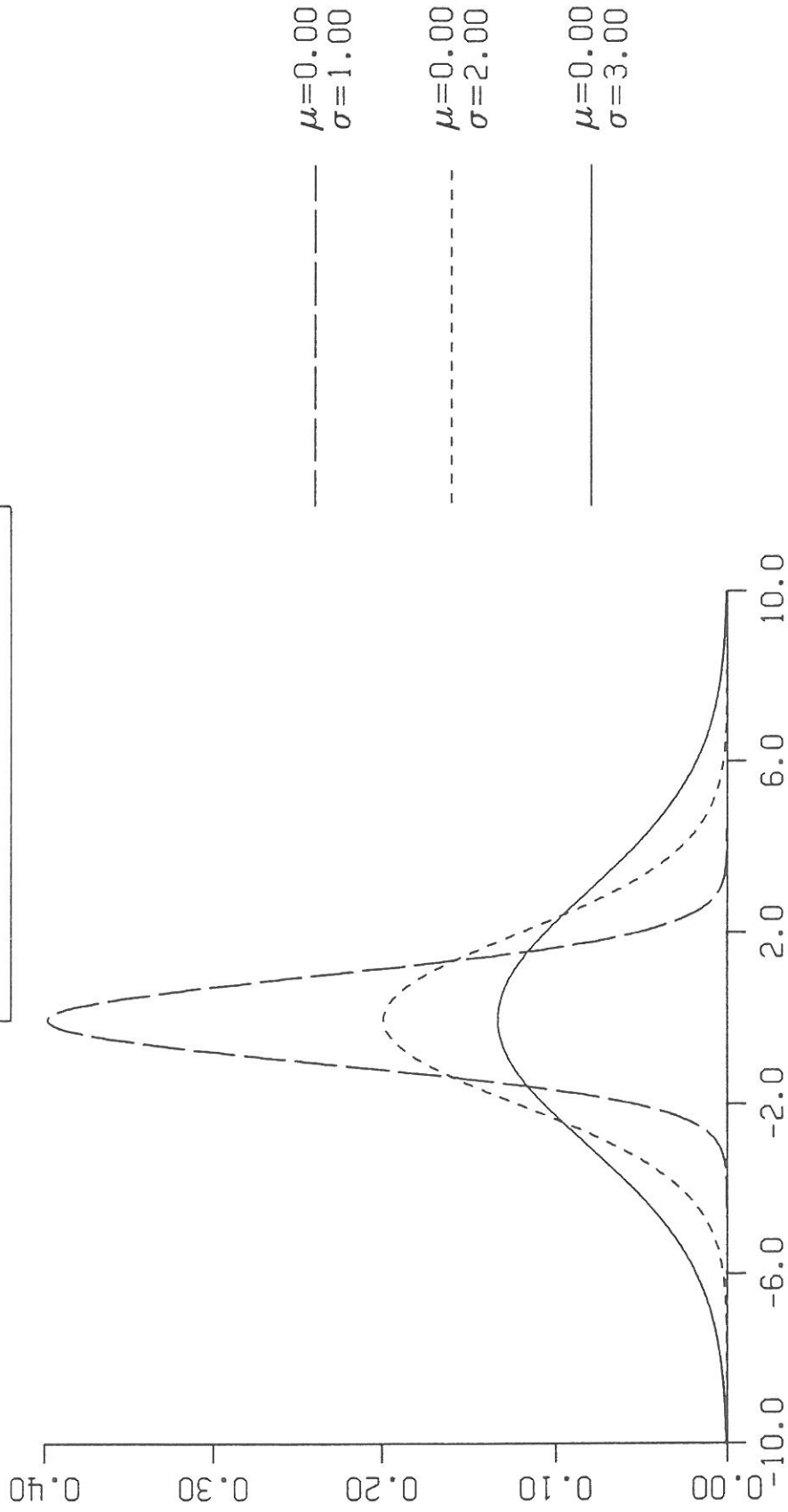
Finke [1983] sowie Kluge und Finke [1986] stellen eine aus der Normalverteilung abgeleitete sog. POTENZNORMAL-Verteilung

$$f(x) = \frac{a}{\sigma\sqrt{2}\pi} (x-b)^{a-1} e^{-\frac{(x-b-x)^2}{2\sigma^2}}$$

vor. Ihre *gestutzte* Version dient den Verfassern zur angenäherten Überführung vor allem rechtsschiefer Verteilungsfunktionen in die Normalverteilung. Die *gestauchte* Version ist besonders für die Anpassung an Daten intermittierender Prozesse (z. B. Niederschlagsprozeß mit Nullwerten) geeignet.

NORMAL (Gauss)

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad -\infty < x < \infty$$



Verteilung: **RAYLEIGH**

Parameter: $\lambda > 0$

Dichtefunktion: $\frac{2x}{\lambda} e^{-\frac{x^2}{\lambda}} \quad x > 0$

Verteilungsfunktion: $1 - e^{-\frac{x^2}{\lambda}}$

Erwartungswert: $\frac{1}{2}\sqrt{\lambda\pi}$

Modus: $\sqrt{\frac{\lambda}{2}}$

Median: $\sqrt{\lambda \ln 2}$

Varianz: $\left(1 - \frac{\pi}{4}\right) \lambda$

Schiefe: *const.* $\approx 0,6311$

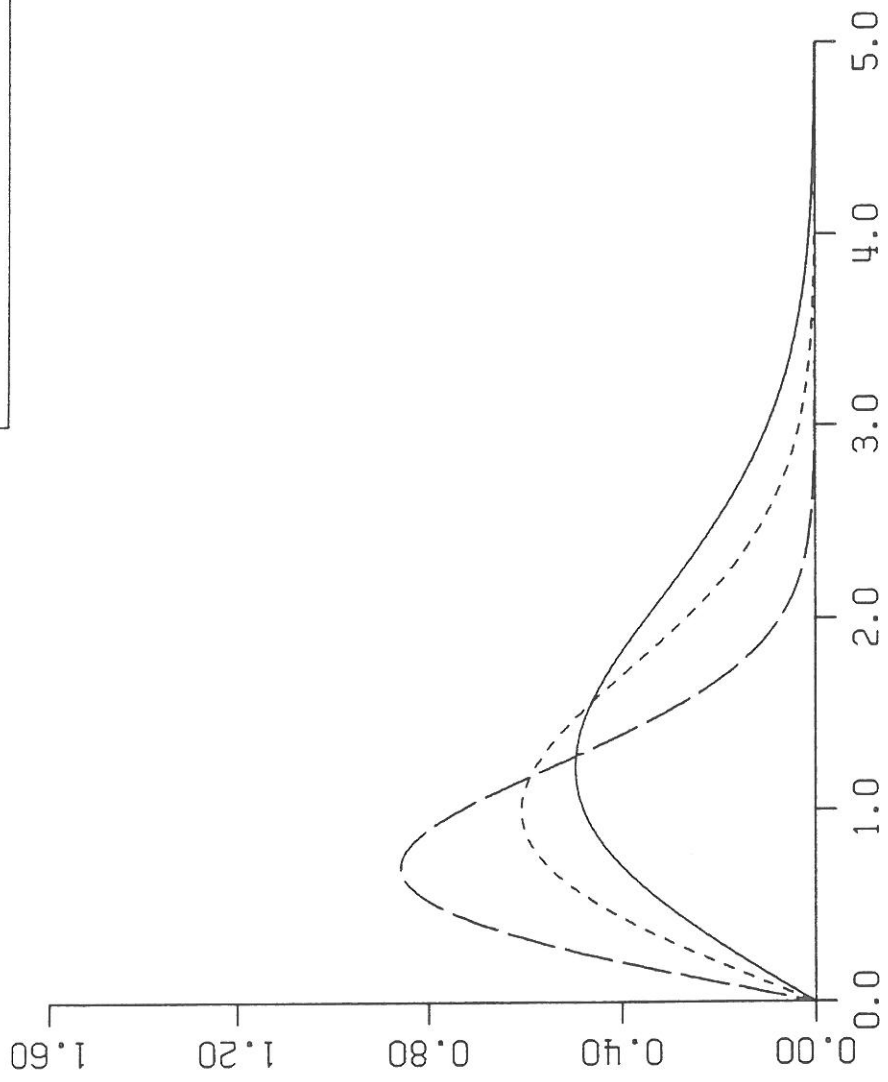
Exzeß: *const.* $\approx 0,2451$

Bemerkungen zur RAYLEIGH-Verteilung:

\Leftarrow *Hypergamma*: $a = 1, b = \frac{1}{\lambda}, c = 2$

RAYLEIGH

$$\frac{2x}{\lambda} e^{-\frac{x^2}{\lambda}} \quad x > 0$$



----- $\lambda = 1.00$

----- $\lambda = 2.00$

----- $\lambda = 3.00$

Verteilung: **RECHTECK**

Parameter: a, b beliebig mit $a < b$

Dichtefunktion: $\frac{1}{b - a}$ $a < x \leq b$

Verteilungsfunktion: $\frac{x - a}{b - a}$ $a < x \leq b$

Erwartungswert: $\frac{1}{2} (a + b)$

Median: $\frac{1}{2} (a + b)$

Varianz: $\frac{1}{12} (b - a)^2$

Schiefe: 0

Exzeß: -1,2

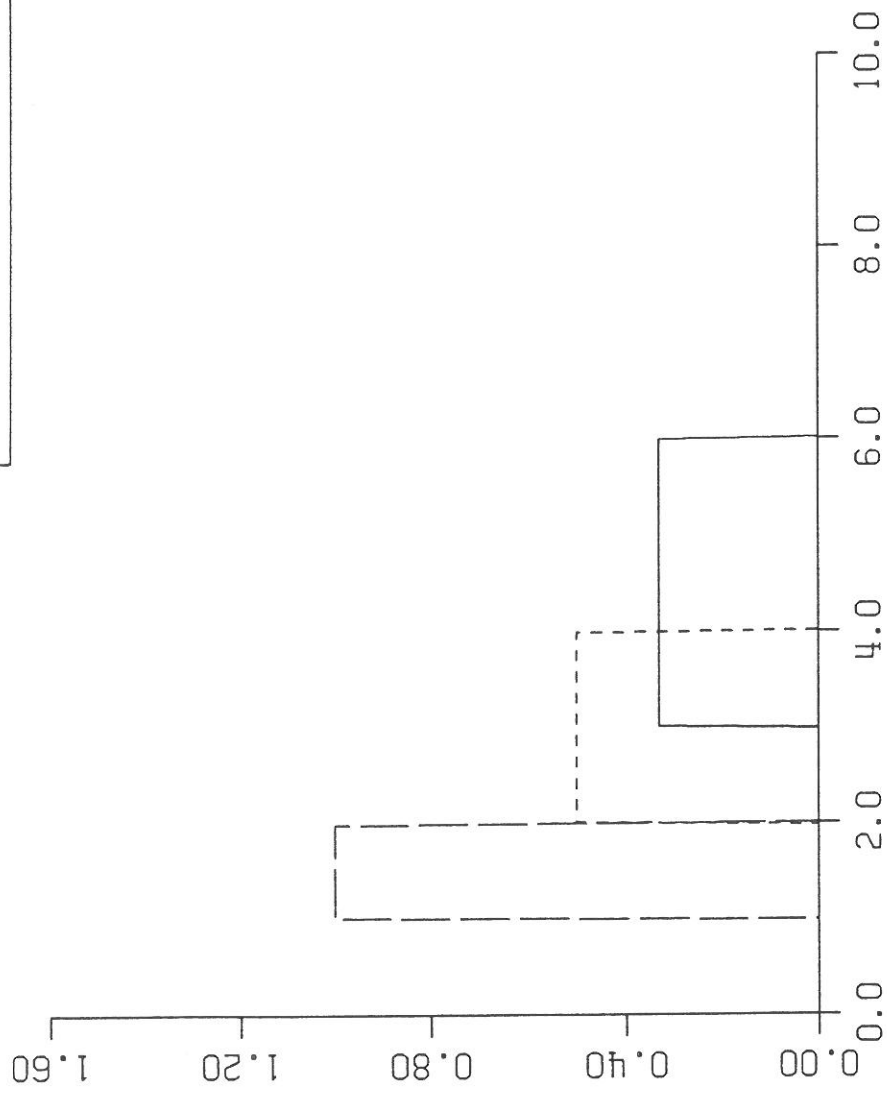
Bemerkungen zur RECHTECK-Verteilung:

⇐ Beta: $p = q = 1$

Die Rechteckverteilung wird oft auch GLEICH-Verteilung genannt.

RECHTECK

$$\frac{1}{b-a} \quad a < x \leq b$$



a=1.00
b=2.00

a=2.00
b=4.00

a=3.00
b=6.00

Verteilung: **STANDARD-NORMAL**

Parameter: -

Dichtefunktion: $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad -\infty < x < \infty$

Verteilungsfunktion: $\int_{-\infty}^x f(t) dt$

Erwartungswert: 0

Modus: 0

Median: 0

Varianz: 1

Schiefe: 0

Exzeß: 0

Bemerkungen zur STANDARD-NORMAL-Verteilung:

← Normal: $x \Rightarrow my + \sigma x$

← t: $n \Rightarrow \infty$

Ist F die Verteilungsfunktion einer Normalverteilung mit Erwartungswert μ und Varianz σ^2 , so gilt:

$$F(x) = \Phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)$$

wenn Φ die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung ist.

$\frac{x - \mu}{\sigma}$ heißt auch standardisierter Wert, er ist umseitig durch x ersetzt.

Die Standardnormalverteilung ist bei der Normalverteilung mit $\mu = 0$ und $\sigma^2 = 1$ geplottet.

Schramm [1985] stellt eine Familie von transformierten Normalverteilungen vor, von denen die beiderseits beschränkte Verteilung

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \frac{b-a}{(x-a)(b-x)} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \left(\ln \frac{x-a}{b-x} - \mu\right)^2} \quad a < x < b$$

in der hydrologischen Extremwertstatistik als JOHNSON-Verteilung Anwendung findet. Sie kann aus der Standardnormalverteilung durch

$$x \Rightarrow \frac{a + b e^z}{1 + e^z} \quad \text{mit } z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

abgeleitet werden.

Für die Verteilungsfunktion F einer Johnsonverteilung mit den Parametern a, b, μ und σ gilt

$$F(x) = \Phi\left(\frac{\ln\left(\frac{x-a}{b-x}\right) - \mu}{\sigma}\right)$$

wenn Φ die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung ist.

Verteilung: T (Student)

Parameter: $n \in \mathbb{N}$ (Freiheitsgrade)

Dichtefunktion:
$$\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} \quad -\infty < x < \infty$$

Verteilungsfunktion:
$$\int_{-\infty}^x f(t) dt$$

Erwartungswert: 0 für $n \geq 2$

Modus: 0

Median: 0

Varianz: $\frac{n}{n-2}$ für $n \geq 3$

Schiefe: 0 für $n \geq 4$

Exzeß: $\frac{6}{n-4}$ für $n \geq 5$

Bemerkungen zur T-Verteilung:

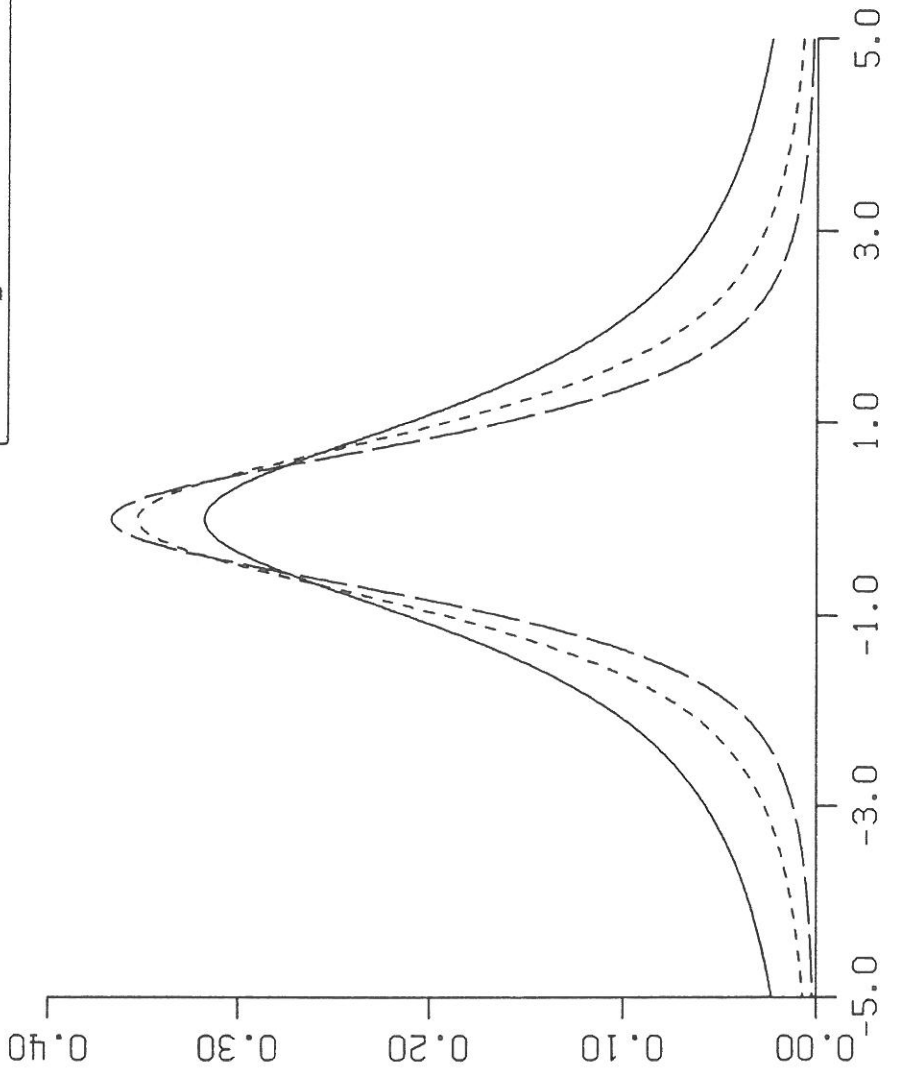
⇒ *Cauchy* (mit $\lambda = 1$) : $n = 1$

⇒ *Standardnormal*: $n \Rightarrow \infty$

Die T-Verteilung wird in der Schätz- und Testtheorie benötigt, aber für $n > 30$ durch die besser handzuhabende Standardnormalverteilung ersetzt.

Eine Anwendung in der Hydrologie wäre möglich, ist aber nicht bekannt.

$$f(x) = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{n\pi} \Gamma(\frac{n}{2})} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} \quad -\infty < x < \infty$$



----- n=3.00

----- n=2.00

----- n=1.00

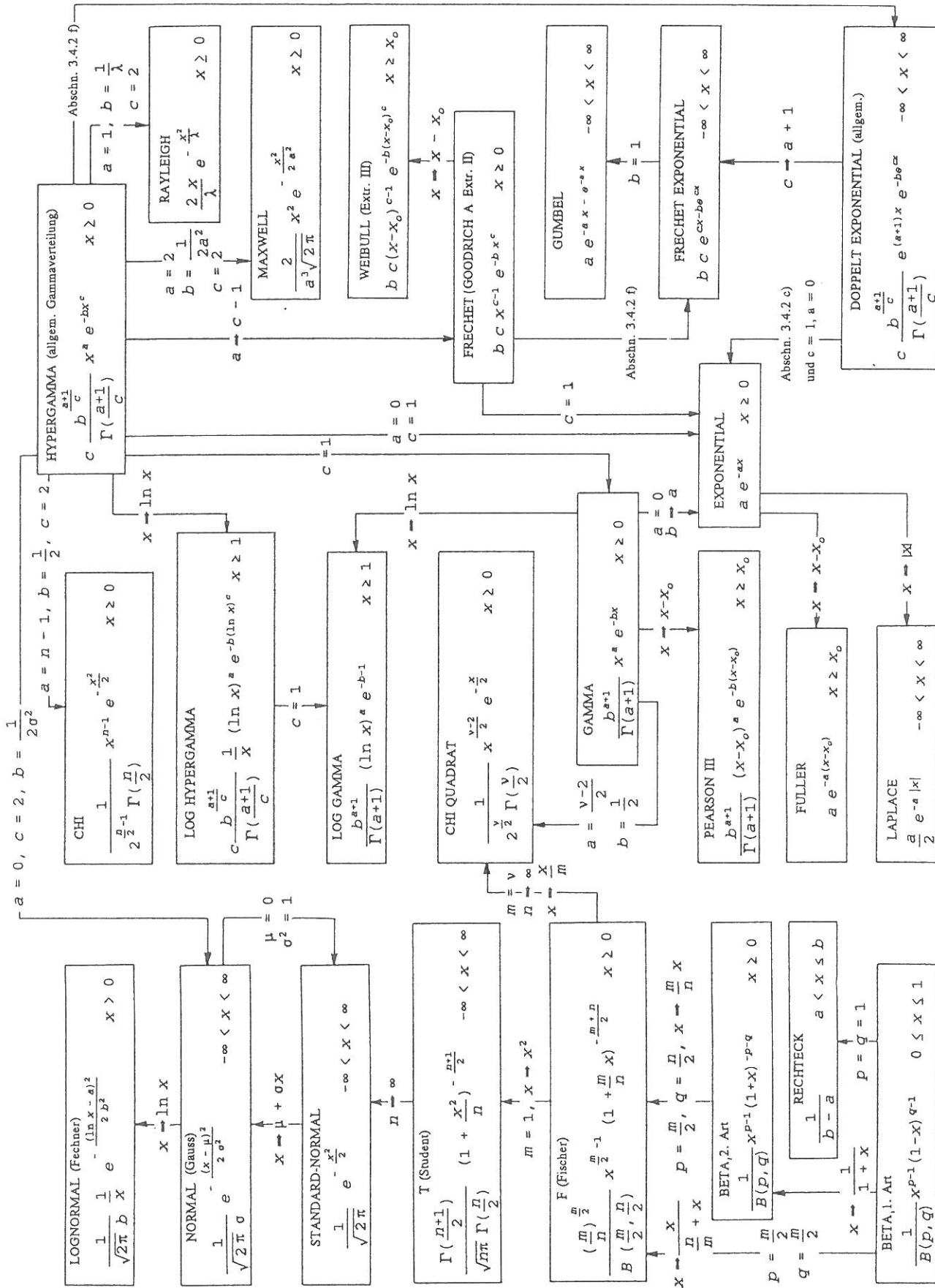


Abb. 4.2 Analytik der Gammaverteilungen und deren Derivate

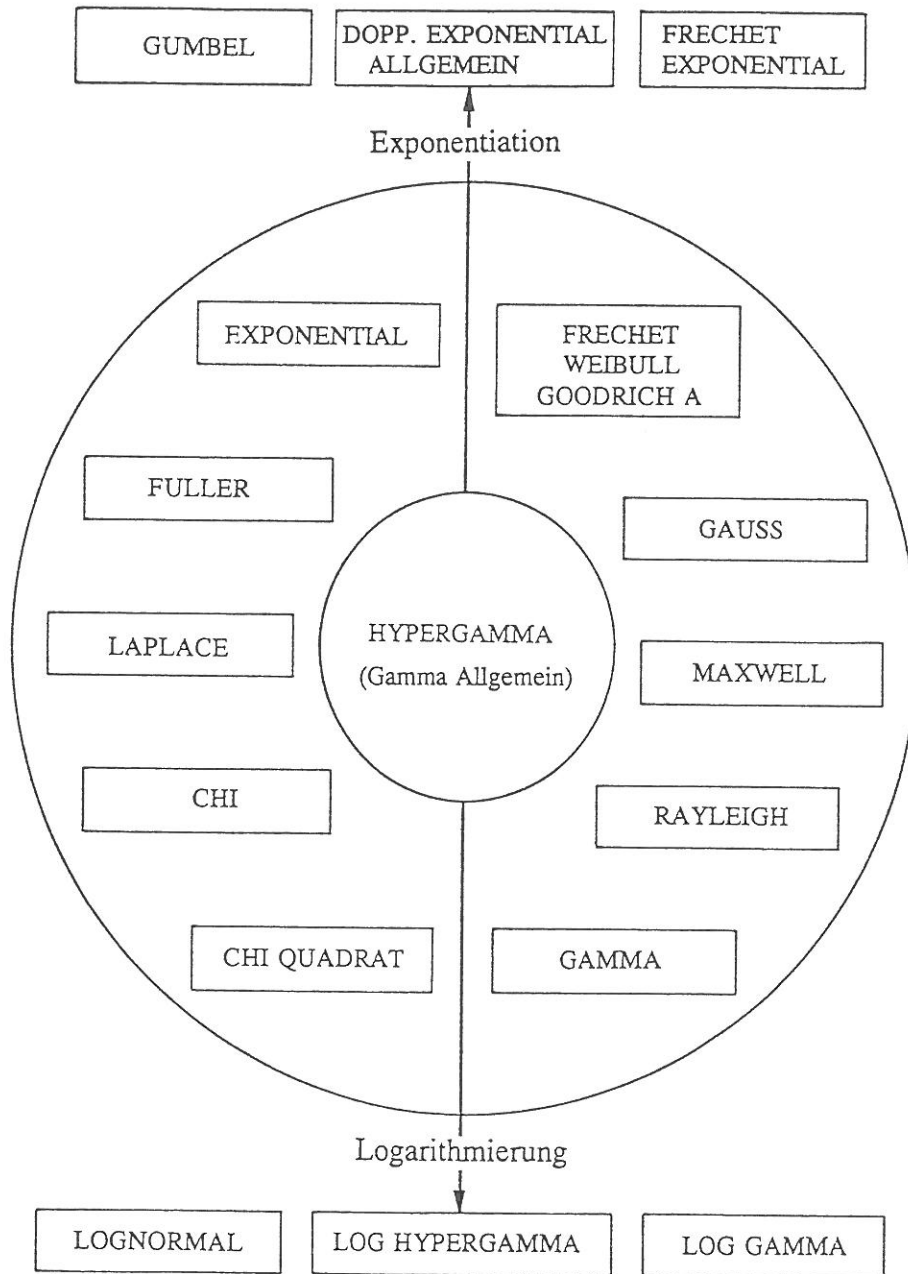


Abb. 4.3 Die Hypergammaverteilung und Verwandte
 Im Kreis: spezielle Hypergammaverteilungen
 außerhalb: Derivate durch Variablentransformation

5. ANPASSUNGSMETHODEN

5.1 Überblick

Für Aussagen über die Unterschreitungswahrscheinlichkeit (Abschnitt 2.2) verwendet die Zeitreihenanalyse ausschließlich Eigenschaften der (empirischen) Häufigkeitsverteilung der Stichprobe. Von Datenfehlern (Meßfehler, Inhomogenität der Zeitreihe, geringes Datenkollektiv in Verbindung mit unzulässig langer Extrapolation) abgesehen, nennt das Schrifttum folgende Fehlerquellen:

- Subjektive Auswahl der Verteilungsfunktion $F(x)$ bzw. der Verteilungsdichte $f(x)$. Zu empfehlen ist die Verwendung einer flexiblen mehrparametrischen Funktion wie der Hypergammaverteilung. Bewährte Testverfahren wie der Kolmogoroff-Smirnow-Test [Kreyszig 1988] und der $n\omega^2$ -Test [Kluge et al. 1991] geben Auskunft über die Akzeptanz einer bestimmten Verteilungsfunktion. Diese Fehlerquelle hat ihre Ursache darin, daß es keine universelle prozeßangepaßte Verteilungsfunktion gibt.
- Anpassung der theoretischen an die empirische Dichteverteilung, d. h. Schätzung der Parameter der ausgewählten Verteilungsfunktion. Die Ursachen für Fehler, die dabei gemacht werden, können sowohl systematischer als auch grundsätzlicher Natur sein, denn die empirische Dichteverteilung $\varphi(x)$ weicht mehr oder weniger und in stets unbekannter Höhe von der Grundgesamtheit ab.

Alle mathematischen Schätzverfahren gehen von $\varphi(x)$ aus. Um die mühselige manuelle Klasseneinteilung zu umgehen, wurden früher graphische Methoden angewandt und entwickelt. Thiess [1975] spricht von sog. Auftragshilfen: eine strenge Auftragshilfe ist die empirische Häufigkeitsverteilung, allgemeine Auftragshilfen sind die sog. plotting positions = plotting positioning formulas. Oder die Jährlichkeit eines Ereignisses wurde aus schiefeabhängigen tabellierten k -Werten ermittelt. Als aufwendiger gelten jene Methoden, in denen eine parameterabhängige Funktion optimiert wird, z. B. die Mutmaßlichkeit (*Maximum-Likelihood-Methode*), die Entropie (*Maximale Entropie-Methode*) und die Gesamtabweichung zwischen empirischer und theoretischer Verteilung (*Kleinste-Quadrate-Methode*). Die weiteste Verbreitung aber hat die sog. Momentenmethode gefunden, also die Parameterschätzung aus der Kenngrößenidentifikation zwischen empirischer und theoretischer Verteilung. Der Vollständigkeit halber seien das sog. Tangenten (t)-Verfahren und die L-Momenten-Methode erwähnt.

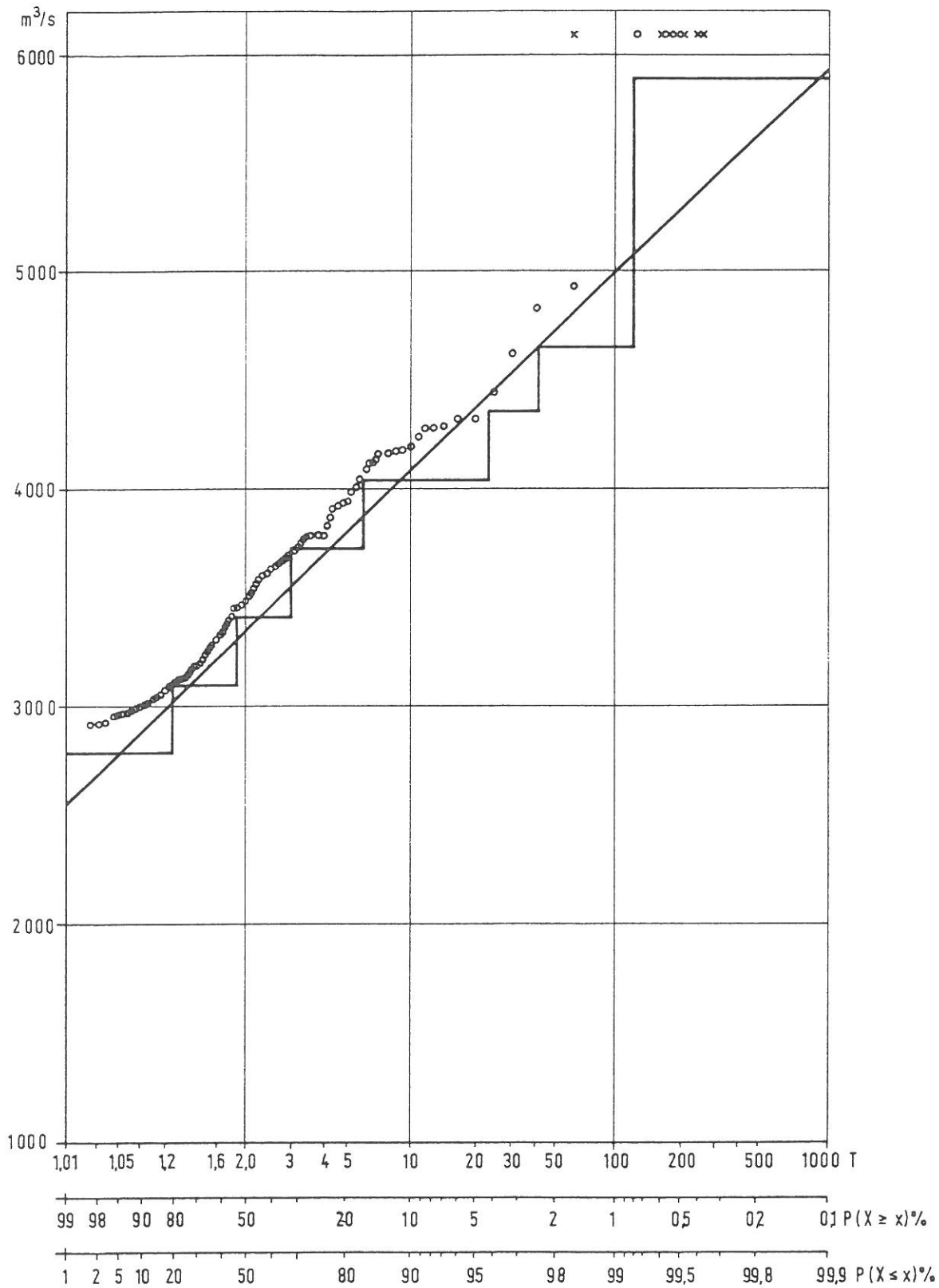


Abb. 5.1 Allgemeine Auftragshilfe N/M (Kreise), strenge Auftragshilfe $\Phi(x)$ (Treppenkurve) und Gumbelverteilung (Gerade). Gumbelpapier für Pegel Maxau/Rhein 1871 - 1990

5.2 Zeichnerische Anpassung (Auftragshilfen, plotting-positioning-formulas)

Als strenge Auftragshilfe gilt z. B. die Unterschreitungswahrscheinlichkeit $P(X \leq x)$. Zur Konstruktion dieser zwischen zweibenachbarten Elementen konstanten Treppenkurve, wie aus Abb. 5.1 ersichtlich, gibt es mehrere Möglichkeiten. Üblicherweise wählt man als Ordinate die Werte x der Zufallsgröße X und als Abzisse entsprechend (2.6) die zugehörige Wahrscheinlichkeit von x :

$$P(X \leq x) = 1 - P(X \geq x) = 1 - 1/T \quad (5.1)$$

Zur Jährlichkeit T s. Abschnitt 2.2.

Die Approximation von P durch Φ wird durch ein Histogramm erleichtert. Eine konkrete Extrapolation wie bei der allgemeinen Auftragshilfe ist nicht möglich, so daß hier eine zeichnerische Ermittlung der Unter- oder Überschreitungswahrscheinlichkeit über den Umfang der Stichprobe hinaus recht unsicher ist.

Demgegenüber lassen sich Verteilungsfunktionen mit nur *einem* Formparameter in der x - $F(x)$ -Ebene als Gerade darstellen, wenn für die $F(x)$ -Achse ein passender Maßstab gewählt wird. *Papiere* oder *Netzdrucke* für solche allgemeine Auftragshilfen liefert der Markt, sie können aber auch selbst erstellt oder dem Schrifttum entnommen werden. Man schätzt die Jährlichkeit von x nach einer der in Tab. 5.1 zusammengestellten Formeln. Diese Formeln enthalten den Umfang N der Zeitreihe $x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_N$ und den Rang M des Ereignisses (Ordnungszahl) $x = x_M$, wie dort angegeben.

		a	b	c	d
1	California 1923	1	0	1	0
2	Weibull 1939	1	1	1	0
3	Hazen 1930	2	0	2	-1
		1	0	1	-0,5
4	Deininger & Westfield 1969	1	1	1	1
		1	1	1	0
5	DVWK 1991	1	0,2	11	-0,4
6	Cegodayev 1955	1	0,4	1	-0,3
7	Blom 1958	1	0,25	1	-3/8
8	Tukey 1962	3	1	3	-1
		1	1/3	1	-1/3
9	Gringorten 1963	1	0,12	1	-0,44
10	Bednarski 1943	1	0	1	-1/3
11	Alexejew 1963	1	M(M+1) -M	1	0,5 (1-b)
12	Thiess 1975	1	1	1	-0,5

$$T(x_M) = \frac{a N + b}{c M + d}$$

N: Umfang des Kollektivs

M (Rang) = 1, 2, ..., N

Tab. 5.1 Einige allgemeine Auftragshilfen [z. T. gesammelt von Chow 1964, Thiess 1975]

Abb. 5.1 zeigt $\Phi(x)$ als strenge Auftragshilfe, $T(x_M) = \frac{N}{M(x)}$ als allgemeine Auftragshilfe und

die Gumbelverteilung $F(x) = e^{-e^{-ax}}$, je im sog. Gumbelpapier für die N = 120 Hochwasserspitzen 1871 - 1990 am Pegel Maxau/Rhein.

Der Parameter a = 0,7834 in F(x) wurde durch Kenngrößenvergleich ermittelt, die Gerade - sie muß im Gumbel-Papier per Definition eine solche sein - darf also nicht mit einer Approximation der T-Punkte verwechselt werden.

Die verschiedenen allgemeinen Auftragshilfen streuen nicht unerheblich, für den höchsten Durchfluß 6.090 m³/s sind die Werte weiterer Formeln als kleine Kreuze in Abb. 5.1 eingezeichnet.

Die wesentliche Leistungsgrenze der allgemeinen Auftragshilfen läßt sich also so formulieren: Nur einparametrische Verteilungsfunktionen werden stets zu einer extrapolierfähigen Geraden, mehrparametrische Verteilungsfunktionen können daher ebenso wie die strenge Auftragshilfe nicht sinnvoll extrapoliert werden.

5.3 Allgemeine Gleichung der hydrologischen Häufigkeitsanalyse (k-Werte)

Aus den 50er-Jahren stammt in der Hydrologie der Versuch, der unabhängigen Veränderlichen des Zufallsprozesses eine Jährlichkeit T ohne Erstellung eines Histogramms zuzuweisen:

$$x = \bar{x} + s k \quad (5.1)$$

Mittelwert \bar{x} und Standardabweichung s sind bekannt, der sog. Häufigkeitsfaktor k ist nicht nur abhängig von T nach (2.6), sondern auch vom Typ der verwendeten Verteilungsfunktion und von der Schiefe cs der empirischen Verteilung entsprechend (2.12). Chow gibt in seinem Handbuch [1964] die k - T -Beziehungen für mehrere Verteilungen als Tabellen bzw. Abbildungen an.

Vorteil dieser Methode ist ihre einfache Handhabung, allerdings wird auch bei ein- und zweiparametrischen Verteilungen unnötigerweise die Schiefe der empirischen Verteilung zur Parameterschätzung herangezogen, was zwangsweise zu einem Genauigkeitsverlust führt.

5.4 Maximum-Likelihood (maximale Mutmaßlichkeit)

$$\text{Die Funktion } l = f(x_1) f(x_2) \dots f(x_N) \quad (5.2)$$

nennt man die Likelihood-Funktion. Sie hängt von den Parametern von $f(x)$ ab und stellt die Wahrscheinlichkeit dar, eine Stichprobe aus den Werten x_1, x_2, \dots, x_N zu erhalten.

Einen Parameterschätzwert findet man bei maximalem l , also bei

$$\frac{dl}{da} = 0, \quad (5.3a)$$

falls $P(x)$ nur den einen Parameter a besitzt, sonst bei

$$\frac{\partial l}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial l}{\partial b} = 0, \quad \dots \quad (5.3b)$$

Diesen Weg der Parameterschätzung nennt man die Maximum-Likelihood(-schätz)-Methode. Leider ist in vielen Fällen eine analytisch geschlossene Lösung der Gleichung (5.3) nicht möglich. Da aber der natürliche Logarithmus von l sein Maximum an derselben Stelle hat wie l , kann ersatzweise

$$\frac{\partial \ln l}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial \ln l}{\partial b} = 0, \quad \dots$$

zum Ziele führen. Alternativ kommt eine numerische Iteration in Frage, wie sie auch zur Parameterschätzung nach der Momentenmethode möglich ist (Abschnitt 5.9).

5.5 Maximale Entropie

Die Methode der maximalen Entropie (MME) wurde nach Phien [1986] erstmals von Jowitt [1979] am Beispiel der Gumbelverteilung in der Hydrologie vorgestellt. Danach liefert die MME die Lösungen für folgende Erwartungswerte:

$$E \left[(x - x_0)/a \right] \gamma \approx 0,57721 \text{ (Euler-Konstante)} \quad (5.4)$$

$$E \left[e^{-(x-x_0)/a} \right] = 1 \quad (5.5)$$

Phien [1985] hat analoge Beziehungen auch für die logarithmische Gammaverteilung aufgestellt. Möglicherweise gibt es weitere Anwendungen der MME sowie Vergleiche mit anderen Methoden.

5.6 Prinzip der kleinsten Quadrate

Danach wird $f(x)$ so in $\varphi(x)$ eingepaßt, daß die Summe der Quadrate aller Abweichungen $f(x_i) - \varphi(x_i)$ an allen Beobachtungspunkten zu einem Minimum wird. Die Verfahren der mathematischen Statistik, die dies leisten, gehen von der Bedingung aus, daß die Abweichungen (*Residuen*) normalverteilt und voneinander unabhängig sind (Abschnitt 5.9).

5.7 Tangentenverfahren

Thies [1975] stellt fest:

- die zweiparametrische Gammaverteilung mit Verschiebungsparameter (dort *dreiparametrisch*) gilt für hydrologische Zwecke als optimal,
- die Momentenmethode ist unzuverlässig,
- die Maximum-Likelihood-Methode ist zwar zuverlässig aber unhandlich sowie
- alle anderen Verteilungen und Schätzverfahren fallen außer Betracht.

Sein (alternatives) Tangentenverfahren bestimmt die 3 Parameter a , b und x_0 über 3 speziell auszuwählende Wertepaare $(f(x_1), x_1)$, $(f(x_2), x_2)$ und $(f(x_3), x_3)$ mittels

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx} = \operatorname{tg} \alpha$$

Einzelheiten des Verfahrens, insbesondere die Auswahl der Wertepaare sind bei Thies [1975] beschrieben. Spätere vergleichende Anwendungen sind nicht bekannt.

5.8 L-Momente

[Clarke & Edgar 1990]

Während bei der Maximum-Likelihood-Methode die Funktion l (5.2) durch $dl/da = 0$ zu dem gewünschten Parameterschätzwert führt, geht man bei der L-Momenten-Methode ebenso wie bei den oben skizzierten Auftragshilfen von der geordneten Reihe $x_1 < x_2 < \dots < x_N$ aus und bildet analog zu (5.2)

$$u_r = N^{-1} \sum_{i=1}^N \binom{N-i}{r} x_i / \binom{N-1}{r} \quad (5.6)$$

und

$$v_r = N^{-1} \sum_{i=1}^N \binom{i-1}{r} x_i / \binom{N-1}{r} \quad (5.7)$$

mit $r = 0, 1, 2, \dots, N-1$.

Daraus folgt für die ersten 4 L-Momente das Gleichungssystem (5.8):

$$\begin{array}{rcccccccc}
 l_1 = & u_0 & & & & & & & v_0 \\
 l_2 = & u_0 & -2 u_1 & & & & & 2 v_1 & -v_0 \\
 l_3 = & u_0 & -6 u_1 & +6 u_2 & & & 6 v_2 & -6 v_1 & +v_0 \\
 l_4 = & u_0 & -12 u_1 & +30 u_2 & -20 u_3 & = & 20 v_3 & -30 v_2 & +12 v_1 & -v_0
 \end{array}$$

Für die Gumbelverteilung erhält man als Parameter-Schätzfunktionen analog zu (5.3)

$$a = \frac{\ln 2}{l_2} \quad (5.8.1)$$

und

$$x_0 = l_1 - \frac{\gamma}{a} \quad (5.8.2)$$

mit $\gamma = 0,57721\dots$ (Euler-Konstante).

Hosking [1986] hat entsprechende Schätzfunktionen auch für andere Verteilungsfunktionen angegeben. Gleichzeitig glaubt er, daß die L-Momente zu einem engeren Vertrauensintervall für die Schätzparameter führen als die klassischen Momente, wiewohl der Unterschied gering sein soll.

5.9 Momentenmethode - Kenngrößenidentifikation

In Abschnitt 4 ist gezeigt, wie die Momente (Kenngrößen) der einzelnen theoretischen Verteilungen von deren Parametern abhängen. Da diese Beziehungen bei den empirischen Verteilungen bekannt sind, muß das Gleichungssystem

$$\begin{array}{l}
 \bar{x} = \mu = \mu(a, b, c) \\
 s^2 = \sigma^2 = \sigma^2(a, b, c) \\
 cs = Cs = Cs(a, b, c)
 \end{array}$$

nach a, b und c aufgelöst werden.

In den einfacheren Fällen gelingt dies explizit, also bei der Beta-, Chi-, Chiquadrat-, Exponential-, Fischer-, Gamma-, Gumbel-, Laplace-, Maxwell-, Normal-, Rayleigh-, Rechteck-, Standardnormal- und Studentverteilung.

Beispiel Gammaverteilung (Abschnitt 4):

$$\bar{x} = my = my(a,b) = \frac{a+1}{b}$$

$$s^2 = \sigma^2 = \sigma^2(a,b) = \frac{a+1}{b^2}$$

Aufgelöst nach a und b liefert das

$$a = \frac{\bar{x}^2}{s^2} - 1 \quad \text{und} \quad b = \frac{\bar{x}}{s^2}$$

Das Gleichungssystem z. B. der Frechet-, Hypergamma- und Lognormalverteilung kann nur numerisch gelöst werden.

6. ANWENDUNG

6.1 Rechenprogramme

Hier soll der Weg von der Meßreihe zur Berechnung der Unterschreitungswahrscheinlichkeit skizziert werden.

Grundsätzlich ist es möglich, die Hoch- und Niedrigwasserwahrscheinlichkeit auch ohne wesentliche rechnerische Hilfsmittel zu berechnen. Für einen Pegel müssen dazu im einfachsten Fall die jährlichen Spitzendurchflüsse der Zeitreihe nach ihrer Größe sortiert, in ein (z. B. Gumbel-)Papier eingetragen und durch diese Punkte eine Gerade gelegt werden (s. Abb. 5.1). Aber bereits die Berechnung und ggf. die Beseitigung des Trends sowie die Verwendung mehrerer Verteilungsfunktionen und Anpassungsmethoden bedarf im Einzelfall eines nicht unerheblichen rechnerischen Aufwandes. Dazu sollen einige hier entwickelte Rechenprogramme zusammengestellt und kurz erläutert werden.

PR.ORDHQ:

Erstellen einer größensortierten Zeitreihe aus jährlich 4 Spitzenabflüssen, hier am Pegel Maxau/Rhein (2 x Sommer, 2 x Winter; Abflußjahr). BS 2000

Lesedatei 20: HQ.MAXAU.1977

1871 - 1990, nach 6 Merkmalen gekennzeichnet

Ausgabedatei 30: ORDHQ.MAXAU.0 bzw. DKENHY11 (in PR.KENHYP)

Größensortierte Zeitreihe, mit $N = 130$ Spitzendurchflüssen aus 4 N Werten, Lücken werden ignoriert. Diese Datei wird in PR.KENHYP und zur Erstellung der allgemeinen Auftragshilfen benutzt.

PR.ORDHQ geht von einer trendbereinigten oder auf einen bestimmten Ausbauzustand umgerechneten homogenen Reihe aus. Für die Verwendung jährlicher Serien - anstelle partieller - steht alternativ PR.AUSHQ zur Verfügung; dabei muß jedes Jahr mit einem Wert belegt sein.

PR.TABVER:

Tabellierung von Dichtefunktionen $f(x)$ und Berechnung ihrer Kenngrößen bei Vorgabe von Parameterkombinationen. BS 2000

Lesedatei 10: DTABVE10

Tabelle aller Dichtefunktionen mit Vorgabe der zu tabellierenden Funktionen

Lesedatei 11: DTABVE11

Start- und Endparameter sowie Parameterschrittweite der zu tabellierenden Dichtefunktionen
Ausgabedatei: L4.TABVER

Für PR.TABVER müssen die Kenngrößen SMO (Modus), SM1 (Mittelwert), SM2 (Varianz) und SM3 (Streuung) als Funktion der Parameter bekannt sein, damit die Schrittweiten dx zur Erfassung der relevanten, zu tabellierenden Spannweite bestimmt werden können.

PR.KENHYP:

Berechnung der Kenngrößen der empirischen Häufigkeitsverteilung, optional der Parameter der Hypergammaverteilung. BS 2000

Lesedatei 10: DKENHY10

Startparameter und Kenngrößen der empirischen Verteilung $\Phi(x)$ zur Parameterberechnung
z. B. der Hypergammaverteilung

Lesedatei 11: DKENHY11

= ORDHQ.MAXAU.0. In UP MOMENT benutzt (aus PR.KENHYP, dort ORDHQ.MAXAU.0)

Ausgabedatei 12: DKENHY12

Kenngrößen der empirischen Häufigkeitsverteilung sowie iterativ optimierte Parameterkombinationen der Hypergammaverteilung

Ausgabedatei: L4.KENHYP

PR.KENHYP bedarf z. Z. noch einer wiederholten Neuintiierung zur Findung der optimalen Parameterkombination a,b,c der Hypergamma- oder einer anderen Verteilung, deren Gleichungssystem (5.9) nur numerisch lösbar ist.

PLOTF:

Plotten der Dichtefunktion für mehrere (z.B. 4) Parametersätze. MS DOS

Lesedatei: DPLOTF

PLOTF hat die Abbildungen in Abschnitt 4 geplottet. Es ist vorgesehen, die einzelnen Rechenprogramme zusammenzubinden.

TABVER:

Tabellierung von Dichtefunktion $f(x)$ und Verteilungsfunktion $F(x)$. Berechnung der Jährlichkeiten $T = 5, 10, 20, 50, 100, 200, 500, 1000$ Jahre sowie Plotten von $f(x)$ und $F(x)$ (PLOTF). MS DOS

Lesedatei 10: DTABVE10

Tabelle aller Dichtefunktionen (Spezifizierung interaktiv)

Lesedatei 11: DTABVE11

Startparameter und weitere kennzeichnende Größen der zu tabellierenden und/oder zu plottenden Funktion

Lesedatei 12: DTABVE12

Vorgabe von Stützwerten der zu tabellierenden Dichtefunktionen

Ausgabedatei: TABVER.OUT

PR.TABVER und TABVER unterscheiden sich inhaltlich: PR.TABVER eignet sich zur $f(x)$ -Tabellierung für eine große Zahl von Parameterkombinationen, $F(x)$ wird nur tabelliert, wenn die Lösung analytisch vorliegt (Gumbel, Exponential, Frechet, Laplace, Rayleigh, Rechteck).

TABVER leistet

- Tabellierung von $f(x)$ und $F(x)$, wobei im Fall der numerischen Berechnung von $F(x)$ eine vorgegebene Genauigkeit eingehalten wird
- optionale Berechnung von T bei Vorgabe eines festen Abflusses $x = Q$ (Bemessungshochwasser) oder Berechnung von $x = Q$ bei Vorgabe von T
- Plotten von $f(x)$ und $F(x)$ mit Parameter- und Kenngrößenkombination sowie T - $F(x)$ -Tabelle. Ein Beispiel zeigt Abb. 6.1.

TABVER benötigt nicht die Analytik der Kenngrößen als Funktion der Parameter, da die relevante Spannweite aus Grenzwerten von $F(x)$ bestimmt wird ($F(x)$ numerisch).

In Tab. 6.1 sind die Ordinatenwerte von $h(Q)$, $\varphi(x)$, $\Phi(x)$ und der nichtnormierten Summenkurve ($\Sigma h(Q)$) für die $L = 20$ Intervalle (davon 9 bis 20 besetzt) zusammengestellt.

Intervall I	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Q (m³/s)	2.480 -2.790	2.790 -3.100	3.100 -3.410	3.410 -3.720	3.720 -4.030	4.030 -4.340	4.340 -4.650	4.650 -4.960	4.960 -5.270	5.270 -5.580	5.580 -5.890	5.890 -6.200
h(Q)	0	24	31	27	17	16	2	2	0	0	0	1
$\varphi(x)$	0	0,200	0,258	0,225	0,142	0,133	0,017	0,017	0,000	0,000	0,000	0,008
$\Sigma h(Q)$	0	24	55	82	99	115	117	119	119	119	119	120
$\Phi(x)$	0	0,200	0,458	0,683	0,825	0,958	0,975	0,992	0,992	0,992	0,992	1,000

Tab. 6.1 Empirische Häufigkeitsverteilung, Pegel Maxau/Rhein 1871-1990

Die Gammaverteilung $f(x)$ für $a = 3,39$ und $b = 1,28$ (und $c = 1$) zeigen Abb. 6.1 und 6.2.

Erfahrungsgemäß kann sich im konkreten Fall die Gammaverteilung deutlich von der Hypergammaverteilung unterscheiden, hier jedoch ist der Verlauf nahezu identisch. Da sich das Gleichungssystem der Hypergammaverteilung nicht geschlossen lösen läßt, ist eine numerische Näherung notwendig. PR.KENHYP berechnet schrittweise für geänderte Parameterkombinationen (a, b, c) die Abweichungen von Mittelwert bzw. Varianz bzw. Schiefe bis die Abweichung verschwindet und die gesuchte optimale Kombination erreicht ist. Dies soll Abb. 6.3 verdeutlichen, wonach die gegebene Kenngrößenkombination nur für $a = 11,30$ einen eindeutigen Wert $b = 21,35$ liefert; dabei ist $c = 0,373 \approx 0,37$. Es stimmen also die Kenngrößen von $\varphi(x)$ mit denen der Hypergammaverteilung der genannten Parameterkombination überein.

Das Programm TABVER berechnet schließlich die gesuchte Unterschreitungswahrscheinlichkeit $\Phi(x)$; dabei muß die Abszissenachse durch $Q = \bar{x} KB + Q_0 = (\bar{x} 310 + 2.636,0) \text{ m}^3/\text{s}$ transformiert werden. Die Abb. 6.1 und 6.2 enthalten diese Tabellen.

6.2 Beispiel für eine Anwendung der Gamma- und der Hypergammaverteilung (Momentenmethode)

Aus der bereits mehrfach zitierten partiellen Serie der $N = 120$ Spitzendurchflüsse von 1871 - 1990 am Pegel Maxau/Rhein (Ausbauzustand 1977) erstellt PR.ORDHQ eine größensortierte Zeitreihe (ORDHQ.MAXAU.0, in PR.KENHYP: DKENHY11). Aus ihr sind die allgemeinen Auftragshilfen (Tab. 5.1, Abb. 5.1) zu entnehmen. Die Ausgleichsgerade durch eine dieser Auftragshilfen in einem bestimmten Netzdruck (Abb. 5.1, Gumbel-Papier) liefert unmittelbar die Jährlichkeit T , die Unterschreitungswahrscheinlichkeit $P(X < x)$ und die Überschreitungswahrscheinlichkeit $P(X \geq x)$.

Für weitere Anwendungen sind die Kenngrößen der empirischen Dichteverteilung (Häufigkeitsverteilung) mittels PR.KENHYP zu berechnen, wobei die oben erwähnte Zeitreihe (DKENHY11) benutzt wird:

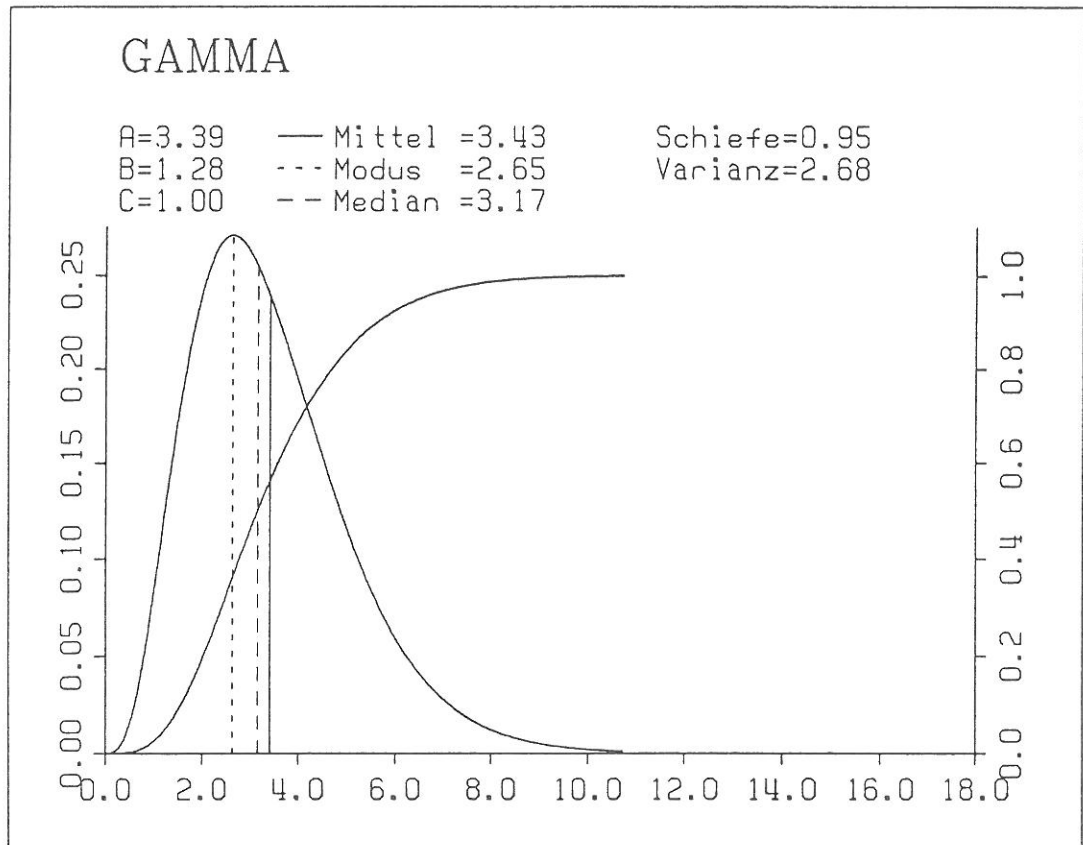
Mittel (SM1)	3 699,3	m ³ /s
normiert	11,93	
Varianz (SM 2)	257 440,7	
normiert	2,68	
Streuung	507,4	m ³ /s
normiert	1,64	
Schiefte (SM3)	1,29	
Q _{Min}	2 930	m ³ /s
Q _{Max}	6 090	m ³ /s
Spannweite	3 160	m ³ /s
Klassenbreite KB = ΔQ	310	m ³ /s

Abb 2.1 zeigt die empirische Häufigkeitsverteilung $\varphi(x)$ sowie $f(x)$ der Gamma- und der Hypergammaverteilung (Pegel Maxau/Rhein 1871 - 1990).

Vor der Berechnung der Parameter der theoretischen Dichteverteilung $f(x)$ muß - z. T. subjektiv - die Nullpunktverschiebung x_0 und Q_0 in $f(x_0) = f(Q_0) = 0$ festgelegt werden. Zweckmäßigerweise legt man diesen Wert nicht in das erste besetzte Intervall, sondern zwischen Mitte und Anfang des letzten leeren Intervalls. Von 2.790 m³/s ist also $KB/2 = 155$ m³/s bzw. $KB = 310$ m³/s zu subtrahieren: $(2.480 \leq Q_0 \leq 2.635)$ m³/s. Für die Parameterberechnung ist daher der relevante Mittelwert $SM1 = (3.699,3 - Q_0)$ m³/s bzw. $x = (3.699,3 - Q_0)/310$ anzusetzen. Mit $\bar{x} = 3,43$ (und $s^2 = 2,68$) folgt nach Abschnitt 5.9

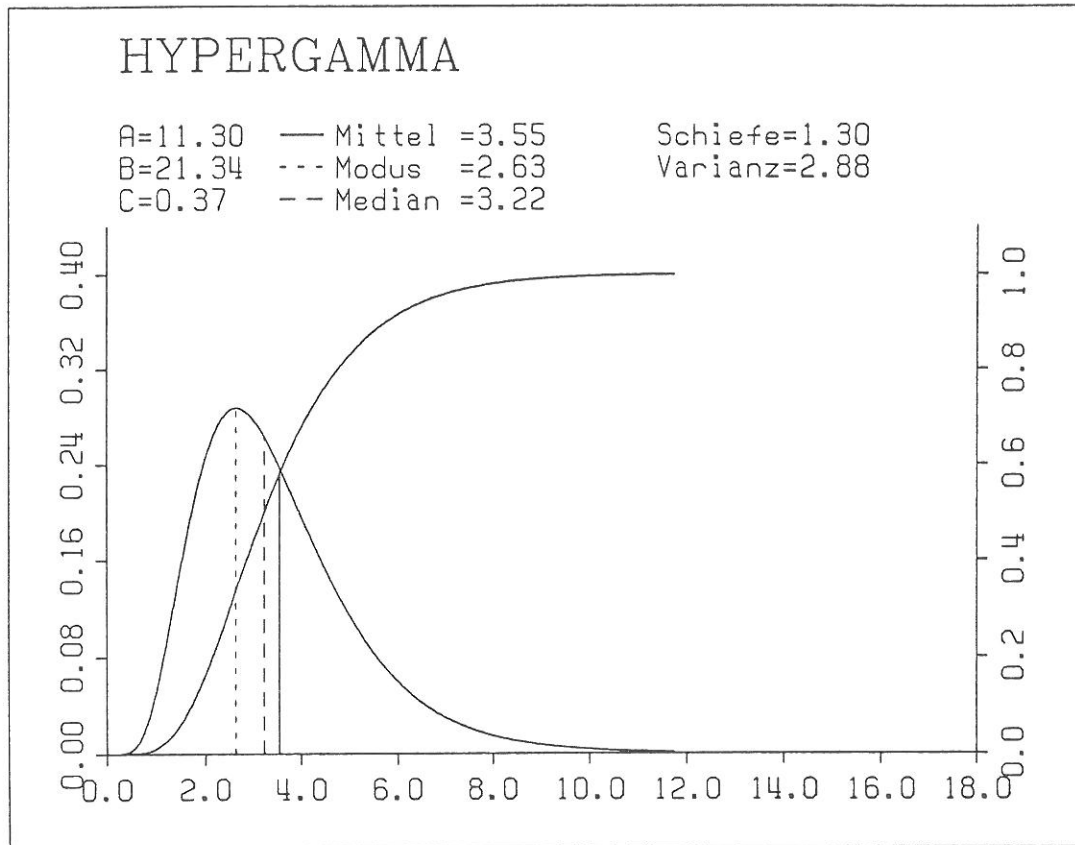
$$a = \frac{x^2}{s^2} - 1 = \frac{3,43^2}{2,68} - 1 = 3,39 \quad \text{und}$$

$$b = \frac{x}{s^2} = \frac{3,43}{2,68} = 1,28$$



T	X	PN	T	X	PN
5	4.67836615	0.80000002	6.278	5.00000000	0.84071052
10	5.62285077	0.89999997	13.444	6.00000000	0.92561912
20	6.48850369	0.96000000	74.162	8.00000000	0.98651597
50	7.55831374	0.98000003	186.316	9.00000000	0.99463278
100	8.32900472	0.99000002	484.194	10.00000000	0.99793471
200	9.07536163	0.99500001	1294.294	11.00000000	0.99922738
500	10.03311157	0.99800002			
1.000	10.74013828	0.99900000			

Abb. 6.1 $f(x)$ und $F(x)$ der Gammaverteilung mit Parametern und Kenngrößen für den Pegel Maxau/Rhein 1871 - 1990 mit der zugehörigen T-x-PN-Tabelle



T	X	PN	T	X	PN
5	4.59378959	0.80000001	6.624	5.00000000	0.84904191
10	5.57783132	0.89999997	13.594	6.00000000	0.92643885
20	6.52419647	0.94999999	28.480	7.00000000	0.96488706
50	7.75373968	0.98000002	60.111	8.00000000	0.98336401
100	8.68115553	0.99000000	126.836	9.00000000	0.99211580
200	9.61289661	0.99500000	266.310	10.00000000	0.99624498
500	10.85751347	0.99800002	554.823	11.00000000	0.99819762
1.000	11.81215702	0.99900002	1144.878	12.00000000	0.99912654

Abb. 6.2 $f(x)$ und $F(x)$ der Hypergammaverteilung mit Parametern und Kenngrößen für den Pegel Maxau/Rhein 1871 - 1990 mit der zugehörigen T-x-PN-Tabelle

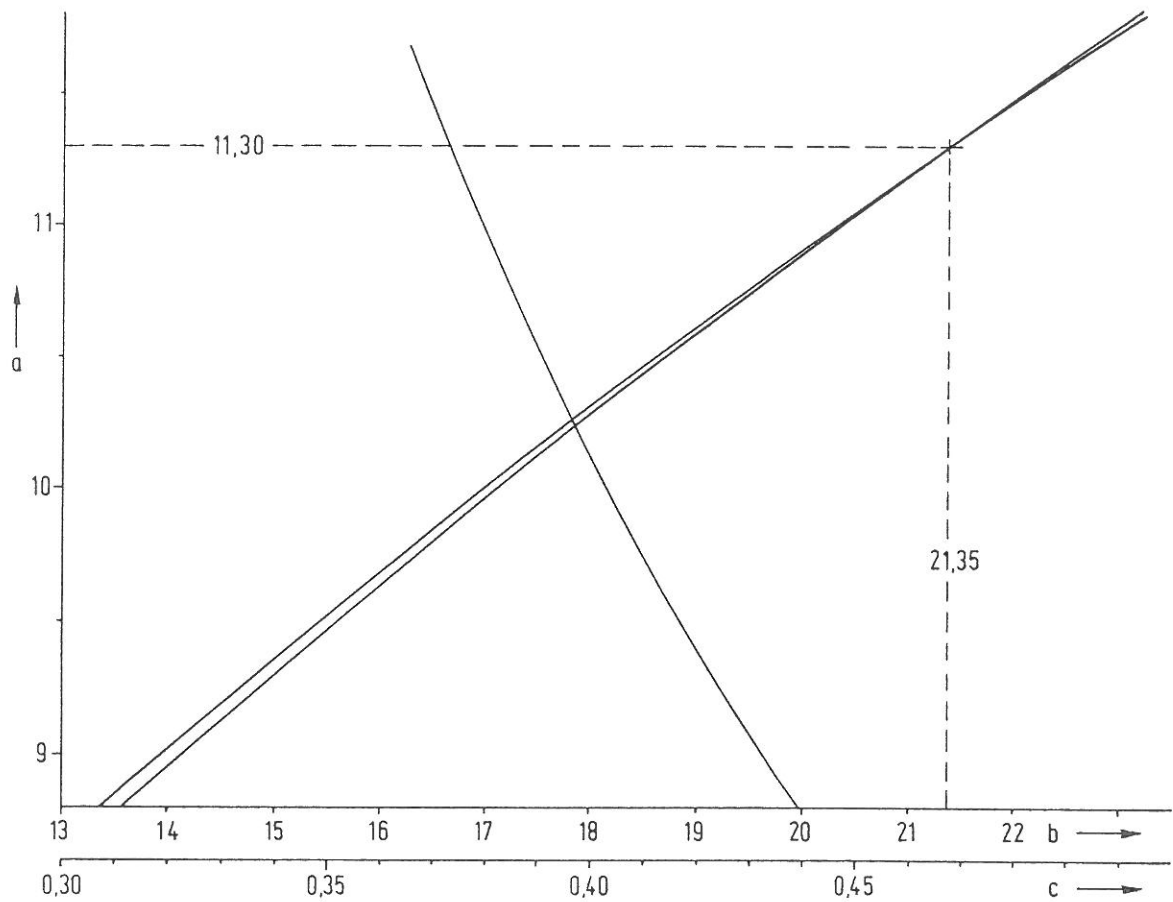


Abb. 6.3 Numerische Parameterbestimmung (Momentenmethode) der Hypergamma-Verteilung nach PR.KENHYP durch Iteration.
 Die ideale Parameterkombination für Maxau/Rhein 1871 - 1990 ist demnach $a = 11,30$;
 $b = 21,34$ und $c = 0,373$

LITERATURVERZEICHNIS

- Chow, V.T. (1964): Handbook of Applied Hydrology. Mc Graw-Hill, New York
- Clarke, R.T. & L.E.M. Terrazas (1990): The use of L-Moments for regionalizing flow records in the Rio Uruguay basin - A case study. IAHS Publ. 191, 179 - 185
- DVWK (1979): Empfehlung zur Berechnung der Hochwasserwahrscheinlichkeit. DVWK-Regeln zur Wasserwirtschaft, 101, 8 S.
- DVWK (1988): Statistische Methoden zu Niedrigwasserdauern und Starkregen. DVWK-Schriften 82, 132 S.
- Finke, W. (1983): Vergleich einiger stochastischer Modelle zur mehrdimensionalen Simulation von hydrologischen und meteorologischen Prozessen auf der Basis von Monatswerten. Acta Hydrophysica XXVIII/3, 187 - 238
- Fügner, D. & M. Schramm & A. Peter & P. Schiekkel (1990): Neue Methoden zur Berechnung von Hochwasserscheiteldurchflüssen mit Wahrscheinlichkeitsaussage. Wasserwirtschaft-Wassertechnik 5, 112 - 114
- Hosking, J.R.M & J.R. Wallis (1990): Regional flood frequency analysis using L-moments. IBM Research Division, NY 10598
- Jowitt, P.W. (1979): The extreme-value type-I distribution and the principle of maximum entropy. Journal of Hydrology 42, 23 - 38
- Kluge, Ch. & W. Finke (1986): Anpassung stetiger Verteilungsfunktionen bei spezieller Klasseneinteilung der Beobachtungswerte, insbesondere des Niederschlags. Acta Hydrophysica XXX/1, 19 - 40
- Kluge, Chr. & H. Schramm & P. Schiekkel (1991): Erfahrungen mit gewichteten $n\omega^2$ -Testgrößen bei der Anpassung von Extremwertverteilungen an Hochwasserscheiteldurchflüssen. Manuskript in Vorbereitung. Die Verfasser sind Mitarbeiter am Institut für Hydrologie und Meteorologie der TU Bremen bzw. bei der Gesellschaft für wasserwirtschaftliche Planung und Systemforschung mbH, Zweigstelle Bremen.
- Kreyszig, E. (1988): Statistische Methoden und ihre Anwendungen. Vandenhoeck & Ruprecht, 451 S.
- Mendel, H. G. (1972): Die Verteilungsfunktion in der hydrologischen Extremwertstatistik. DGM 16/1, 20 - 22
- Phien, H.N. (1986): Sampling properties of the maximum entropy estimators for the extreme value type-I distribution. Journal of Hydrology 86, S. 391 - 398
- Phien, H.N. & L.-C. Hsu (1985): Variance of the T-year event in the log pearson type-III distribution. Journal of Hydrology 77, S. 141 - 158
- Schramm, M. (1985): Ein Parameterschätzverfahren für die Johnson-Verteilung. Acta Hydrophysica XXIX/1, 71 - 81

- Taubenheim, J. (1969): Statistische Auswertung geophysikalischer und meteorologischer Daten. Akadem. Verlagsgesellschaft Geest & Portig, Leipzig, 386 S.
- Thiess, N. (1975): Ermittlung optimaler Verteilungen und Parameterschätzverfahren der mathematischen Statistik und ihre Anwendung in der Hydrologie. Dissertation an der Universität Karlsruhe, 127 S.

CHR/KHR (1978): Das Rheingebiet, Hydrologische Monographie. Staatsuitgeverij, Den Haag/
Le bassin du Rhin. Monographie Hydrologique. Staatsuitgeverij, La Haye. ISBN 90-12017-75-0

Berichte der KHR

Rapports de la CHR

- I-1 GREBNER, D. (1982): Objektive quantitative Niederschlagsvorhersagen im Rheingebiet. Stand 1982 (nicht mehr lieferbar)/
Prévisions objectives et quantitatives des précipitations dans le bassin du Rhin. Etat de la question en 1982 (édition épuisée)
- I-2 GERHARD, H.; MADE, J.W. VAN DER; REIFF, J.; VREES, L.P.M. DE (1983): Die Trocken- und Niedrigwasserperiode 1976. (2. Auflage 1985)/
La sécheresse et les basses eaux de 1976 (2ème édition, 1985). ISBN 90-70980-01-0
- I-3 HOFIUS, K. (1985): Hydrologische Untersuchungsgebiete im Rheingebiet/
Bassins de recherches hydrologiques dans le bassin du Rhin. ISBN 90-70980-02-9
- I-4 BUCK, W.; KIPGEN, R.; MADE, J.W. VANDER; MONTMOLLIN, F. DE; ZETTL, H.; ZUMSTEIN, J.F. (1986):
Berechnung von Hoch- und Niedrigwasserwahrscheinlichkeit im Rheingebiet/
Estimation des probabilités de crues et d'étiages dans le bassin du Rhin. ISBN 90-70980-03-7
- I-5 TEUBER, W.; VERAART, A.J. (1986): Abflußermittlung am Rhein im deutsch-niederländischen Grenzbereich/
La détermination des débits du Rhin dans la région frontalière germano-hollandaise. ISBN 90-70980-04-5
- I-6 TEUBER, W. (1987): Einfluß der Kalibrierung hydrometrischer Meßflügel auf die Unsicherheit der Abflußermittlung. Ergebnisse eines Ringversuchs/
Influence de l'étalonnage des moulinets hydrométriques sur l'incertitude des déterminations de débits. Résultats d'une étude comparative. ISBN 90-70980-05-3
- I-7 MENDEL, H.-G. (1988): Beschreibung hydrologischer Vorhersagemodelle im Rheineinzugsgebiet/
Description de modèles de prévision hydrologiques dans le bassin du Rhin. ISBN 90-70980-06-1
- I-8 ENGEL, H.; SCHREIBER, H.; SPREAFICO, M.; TEUBER, W.; ZUMSTEIN, J.F. (1990): Abflußermittlung im Rheingebiet im Bereich der Landesgrenzen/
Détermination des débits dans les régions frontalières du bassin du Rhin. ISBN 90-70980-01-x
- I-9 CHR/KHR (1990): Das Hochwasser 1988 im Rheingebiet/
La crue de 1988 dans le bassin du Rhin. ISBN 90-70980-11-8
- I-10 NIPPES, K.-R. (1991): Bibliographie des Rheingebietes/
Bibliographie du bassin du Rhin. ISBN 90-70980-13-4
- I-11 BUCK, W.; FELKEL, K.; GERHARD, H.; KALWEIT, H.; MALDE, J. VAN; NIPPES, K.-R.; PLOEGER, B.; SCHMITZ, W. (1993): Der Rhein unter der Einwirkung des Menschen - Ausbau, Schifffahrt, Wasserwirtschaft/
Le Rhin sous l'influence de l'homme - Aménagement, navigation, gestion des eaux. ISBN 90-70980-17-7
- I-12 SPREAFICO, M.; MAZLIK, A. VAN (Red.) (1993): Alarmmodell Rhein. Ein Modell für die operationelle Vorhersage des Transportes von Schadstoffen im Rhein. ISBN 90-70980-18-5
- Katalog/Catalogue 1 SPROKKEREEF, E. (1989): Verzeichnis der für internationale Organisationen wichtigen Meßstellen im Rheingebiet/
Tableau de stations de mesure importantes pour les organismes internationaux dans le bassin du Rhin. ISBN 90-70980-08-8

- II-1 MADE, J.W. VANDER (1982): Quantitative Analyse der Abflüsse (nicht mehr lieferbar)/
Analyse quantitative des débits (édition épuisée)
- II-2 GRIFFIOEN, P.S. (1989): Alarmmodell für den Rhein/
Modèle d'alerte pour le Rhin. ISBN 90-70980-07-x
- II-3 SCHRÖDER, U. (1990): Die Hochwasser an Rhein und Mosel im April und Mai 1983/
Les crues sur les bassins du Rhin et de la Moselle en avril et mai 1983. ISBN 90-70980-09-6
- II-4 MAZIJK, A. VAN; VERWOERDT, P.; MIERLO, J. VAN; BREMICKER, M.; WIESNER, H. (1991):
Rheinalarmmodell Version 2.0 - Kalibrierung und Verifikation/
Modèle d'alerte pour le Rhin version 2.0 - Calibration et vérification. ISBN 90-70980-12-6
- II-5 MADE, J.W. VANDER (1991): Kosten-Nutzen-Analyse für den Entwurf hydrometrischer Meßnetze/
Analyse des coûts et des bénéfices pour le projet d'un réseau hydrométrique. ISBN 90-70980-14-2
- II-6 CHR/KHR (1992): Contributions to the European workshop Ecological Rehabilitation of
Floodplains, Arnhem, The Netherlands, 22-24 September 1992. ISBN 90-70980-15-0
- II-7 NEMEC, J. (1993): Comparison and selection of existing hydrological models for the simulation
of the dynamic water balance processes in basins of different sizes and on different scales.
ISBN 90-70980-16-9
- II-8 MENDEL, H.-G. (1993): Verteilungsfunktionen in der Hydrologie. ISBN 90-70980-19-3

Einige Informationen über die:

INTERNATIONALE KOMMISSION FÜR DIE HYDROLOGIE DES RHEINGEBIETES (KHR)

Gründung

1970 Im Rahmen der Internationalen Hydrologischen Dekade (IHD) der UNESCO.

1975 Fortsetzung der Arbeiten im Rahmen des Internationalen Hydrologischen Programms (IHP) der UNESCO und des Operationellen Hydrologie-Programms (OHP) der WMO.

1978 Unterstützung der Arbeiten der Kommission durch Austausch einer Verbal-Note zwischen den mitarbeitenden Ländern.

Aufgaben

- Förderung der Zusammenarbeit hydrologischer Institutionen und Dienste im Einzugsgebiet des Rheins.
- Durchführung von Untersuchungen über die Hydrologie des Rheingebietes und Austausch der Ergebnisse diesbezüglicher Studien.
- Förderung des Austausches von hydrologischen Daten und Informationen im Rheingebiet (z.B. aktuelle Daten, Vorhersagen).
- Entwicklung von standardisierten Verfahren für die Sammlung und Bearbeitung hydrologischer Daten in den Rheinanliegerstaaten.

Mitarbeitende Länder

Schweiz, Österreich, Bundesrepublik Deutschland, Frankreich, Luxemburg, Niederlande

Arbeitssprachen

Deutsch und Französisch

Organisation

Ständige Vertreter (Sitzungen 2mal pro Jahr) unterstützt von einem ständigen Sekretariat. Die Bearbeitung von Projekten wird von Rapporteurs und internationalen Arbeitsgruppen durchgeführt.

Quelques informations sur la:

COMMISSION INTERNATIONALE DE L'HYDROLOGIE DU BASSIN DU RHIN (CHR)

Institution

1970 Dans le cadre de la Décennie Hydrologique Internationale (DHI) de l'UNESCO.

1975 Poursuite des travaux dans le cadre du Programme Hydrologique International (PHI) de l'UNESCO et du Programme d'Hydrologie Opérationnelle (PHO) de l'OMM.

1978 Appui des travaux de la Commission par l'échange d'une note verbale entre les pays concernés.

Tâches

- Encourager la coopération entre les instituts et les services actifs dans le bassin du Rhin.
- Réalisation d'études hydrologiques dans le bassin du Rhin et échange de résultats des études concernées.
- Encourager l'échange de données et d'informations hydrologiques dans le bassin du Rhin (p.ex. données actuelles, prévisions).
- Elaboration de méthodes standardisées pour la collecte et le traitement des données hydrologiques dans les Etats riverains du Rhin.

Pays participants

la Suisse, l'Autriche, la République Fédérale d'Allemagne, la France, le Luxembourg, les Pays-Bas

Langues de travail

allemand et français

Organisation

Les représentants permanents (réunions deux fois par an) sont soutenus par le secrétariat permanent. Les études sont réalisées par des rapporteurs et des groupes de travail internationaux.

Auswahl der laufenden Arbeiten

»Änderungen im Abflußregime«

- Beschreibung des Einflusses der menschlichen Aktivitäten auf die Rheinabflüsse.
- Bestimmung der Auswirkungen von Bodennutzungs- und Klimaänderungen auf das Abflußregime des Rheins.
- Untersuchungen über Auswirkungen des Waldes auf den Wasserhaushalt.

»Fließzeiten«

- Ermitteln von Fließzeiten und Stofftransport im Rhein zur Verbesserung des Rheinalarmmodells (in Zusammenarbeit mit der IKSR).

»Sediment«

- Verbesserung und Standardisierung der Verfahren zur Messung von Schwebstoffgehalten und Bodentransport des Sediments.
- Beschreibung des Sedimenthaushaltes im Fluß.

»Fortschreibung der Monographie«

- Übersicht hydrologischer Daten über die Perioden 1971-1980 und 1981-1990 als Fortsetzung der im Jahre 1978 veröffentlichten Monographie »Das Rheingebiet«.

Fertiggestellte Arbeiten

sie Publikationsliste, Seite 119

Principaux thèmes en cours

«Changements dans le régime des débits»

- Description de l'impact des activités humaines sur le débit du Rhin.
- Détermination des effets des changements du climat et de l'utilisation du sol sur le régime des débits du Rhin.
- Etude de l'influence du forêt sur l'hydrologie.

«Temps d'écoulement»

- Détermination des temps d'écoulement et de transport des substances dans le Rhin pour l'amélioration du modèle d'alerte du Rhin (en collaboration avec la CIPR).

«Sédiments»

- Amélioration et standardisation des méthodes pour la mesure des matières en suspension et du charriage de fond.
- Description de la situation de la sédimentation dans le fleuve.

«Actualisation de la Monographie»

- Données hydrologiques sur les périodes 1971-1980 et 1981-1990 complétant celles de la monographie hydrologique «le Bassin du Rhin» publiée en 1978.

Travaux effectués

voir la liste de publications, page 119

Enige gegevens betreffende de:

**INTERNATIONALE COMMISSIE VOOR DE
HYDROLOGIE VAN HET RIJNGEBIED
(CHR)**

Oprichting

1970 In het kader van het Internationaal Hydrologisch Decennium (IHD) van de UNESCO.

1975 Voortzetting van de werkzaamheden in het kader van het Internationaal Hydrologisch Programma (IHP) van de UNESCO en het Operationeel Hydrologisch Programma (OHP) van de WMO.

1978 Ondersteuning van het werk van de Commissie door een nota-uitwisseling tussen de samenwerkende landen.

Taken

- Bevordering van samenwerking tussen hydrologische instituten en diensten in het stroomgebied van de Rijn.
- Uitvoeren van hydrologische studies in het Rijngebied en uitwisseling van de onderzoeksresultaten.
- Bevorderen van de uitwisseling van hydrologische gegevens en informatie in het Rijngebied (bijv. actuele gegevens, voorspellingen).
- Ontwikkeling van standaardmethoden voor het verzamelen en bewerken van hydrologische gegevens in de Rijnsoeverstaten.

Deelnemende landen

Zwitserland, Oostenrijk, Bondsrepubliek Duitsland, Frankrijk, Luxemburg, Nederland

Voertalen

Duits en Frans

Organisatie

Vaste vertegenwoordigers (vergaderingen tweemaal per jaar) ondersteund door een permanent secretariaat. Onderzoeken worden door rapporteurs en internationale werkgroepen uitgevoerd.

Some information on the:

**INTERNATIONAL COMMISSION FOR THE
HYDROLOGY OF THE RHINE BASIN (CHR)**

Foundation

1970 Within the framework of UNESCO's International Hydrological Decade (IHD).

1975 Continuation of activities in the framework of UNESCO's International Hydrological Programme (IHP) and the Operational Hydrology Programme (OHP) of WMO.

1978 Support of the Commission's activities by exchange of a verbal note between the participating countries.

Tasks

- Support of co-operation between hydrological institutes and services active in the catchment area of the Rhine.
- Executing hydrological studies in the Rhine basin and exchange of research results.
- Promoting the exchange of hydrological data and information in the Rhine basin (e.g. current data, forecasts).
- Development of standardized methods for collecting and processing hydrological data in the Rhine riparian states.

Participating countries

Switzerland, Austria, Federal Republic of Germany, France, Luxemburg, the Netherlands

Working languages

German and French

Organization

Permanent representatives (meetings twice a year) supported by a permanent secretariat. Studies are carried out by rapporteurs and international working groups.

Belangrijkste lopende onderzoeken

„Veranderingen in het afvoerregime”

- Beschrijving van de invloed van menselijke activiteiten op de Rijnafvoeren
- Bepaling van de invloed van veranderingen in bodemgebruik en klimaat op het afvoerregime van de Rijn.
- Onderzoek naar de invloed van bos op de waterhuishouding.

„Stroomtijden”

- Bepaling van de stroomtijden en stoftransport in de Rijn ter verbetering van het alarmmodel voor de Rijn (in samenwerking met de IRC).

„Sediment”

- Verbetering en standaardisering van meetmethoden voor gehalten aan zwevend materiaal en bodemtransport.
- Beschrijving van de sedimenthuishouding in de rivier.

„Voortzetting Monografie”

- Overzicht van hydrologische gegevens over de perioden 1971-1980 en 1981-1990 als voortzetting van de in 1978 uitgegeven hydrologische monografie „Het stroomgebied van de Rijn”.

Afgesloten onderwerpen

zie lijst van publikaties, blz. 119

Selection of current subjects

‘Changes in the discharge regime’

- Description of the impact of human activities on the Rhine discharges.
- Determination of the effect of changes in land use and climate on the discharge regime of the Rhine.
- Research into the effects of forest on the hydrology of the basin.

‘Travel times’

- Determination of the travel times and constituent transport in the Rhine for the improvement of the alarm model for the Rhine (in co-operation with CIPR/IKSR).

‘Sediment’

- Improvement and standardization of methods to measure suspended load and bed-load transport.
- Description of sediment characteristics of the river.

‘Continuation of the Monograph’

- Hydrological data for the periods 1971-1980 and 1981-1990 as a continuation of the hydrological monograph ‘The Rhine basin’ published in 1978.

Completed projects

see list of publications, p. 119